Über Integralinvarianten

und

Differentialgleichungen

von

Sophus Lie

Videnskabsselskabets Skrifter. I. Mathematisk-naturv. Klasse. 1902. No. 1

Udgivet for Fridtjof Nansens Fond

Christiania

In Kommission bei Jacob Dybwad

A. W. Brøggers Buchdruckerei

1902

Fremlagt i Vid. Selsk. math. naturv. Kl. den 27de Septbr. 1901.

Vorwort.

Die Gesellschaft der Wissenschaften hat uns mit dem Auftrag beehrt, Professor Sophus Lies hinterlassene Manuscripte durchzusehen, da sich darunter möglicherweise Abhandlungen befinden konnten, die sich zur Bearbeitung oder Veröffentlichung eigneten.

Von den sehr zahlreichen hinterlassenen Manuscripten, deren Verzeichniss später veröffentlicht werden soll, sind nur wenige soweit ausgearbeitet, dass sie ohne weiteres gedruckt werden könnten.

Dagegen finden sich zahlreiche Entwürfe mit skizzirten Arbeiten und hingeworfenen Ideen, die bei eingehenderer Bearbeitung wohl interessante Resultate liefern können.

Wir publicieren hiermit die erste der nachgelassenen Abhandlungen: *Über Integralinvarianten und Differentialgleichungen.* Diese bildet eine Fortsetzung zweier früherer Abhandlungen über Integralinvarianten, die in den Berichten der kgl. Säch. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig 1897 publicirt sind, und war von Lie ursprünglich, wie aus einer Aufschrift auf dem Manuscript hervorgeht, bestimmt ebenda zu erscheinen.

Die Abhandlung ist im Grossen und Ganzen ziemlich ins Reine geschrieben und hier und da sind Correcturen übergeklebt. Daher dürfte sie von Lie bereits für den Druck bestimmt gewesen sein. Zwar fehlt der angekündigte zweite Theil (siehe S. 6, Note 7) und die Einleitung scheint noch nicht endgiltig redigiert gewesen zu sein; aber die Abhandlung bildet trotzdem ein so abgeschlossenes Ganzes, dass wir kein Bedenken tragen sie zu veröffentlichen.

Wir haben das Studium dieser Abhandlung durch Anmerkungen an solchen Stellen zu erleichtern gesucht, wo ein Citat oder eine Erläuterung wünschenswerth scheinen konnte. Hier und da haben wir auch kleinere Schreib- oder Rechenfehler richtig gestellt, worauf wir stets in Anmerkungen aufmerksam machen.

Wir sprechen hiermit Hr. Professor H. Goldschmidt in Christiania und Hr. Professor Friedrich Engel in Leipzig unseren besten Dank für ihre Mithülfe beim Correcturenlesen aus. Dem Letztgenannten verdanken wir auch mehrere werthvolle Aufklärungen über gewisse Punkte in der Einleitung.

Alf Guldberg. **Carl Størmer.**

Über Integralinvarianten und Differentialgleichungen*.

von

Sophus Lie.

In zwei Abhandlungen, die in den Leipziger Berichten** erschienen sind, habe ich wichtige Beiträge zu der schon früher von mir gestreiften allgemeinen Theorie der Integralinvarianten geliefert. In der ersten Arbeit, die zunächst dem allgemeinen Begriffe der Integralinvarianten und dem Zusammenhang dieses Begriffes mit meiner Theorie der continuierlichen Gruppen und der Differentialinvarianten gewidmet war, sah ich mich dazu veranlasst, das Abhängigkeitsverhältniss zu betonen, in dem die Arbeiten anderer Mathematiker über diesen Gegenstand zu meinen älteren Arbeiten stehen. In der zweiten Abhandlung beschäftigte ich mich mit der *Verwerthung bekannter Integralinvarianten für die Integration vorgelegter Differentialgleichungen* und insbesondere für die Reduction einer gegebenen continuirlichen Gruppe auf ihre Normalform.

In dieser dritten Abhandlung beschäftige ich mich wiederum mit der Bedeutung der Integralinvarianten für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen, und zwar zerfällt diese Arbeit in mehrere Abschnitte[1]), in denen ein lehrreiches *Beispiel* von sehr allgemeinem Charakter im Einzelnen durchgeführt wird; gelegentlich gebe ich auch theoretische Entwicklungen, welche die *allgemeine Theorie* der Integralinvarianten fördern sollen.

---

* Die Theorien dieser Abhandlung entwickelte ich im Sommersemester 1897 in meinen Seminar-Vorlesungen an der Universität Leipzig. S. Lie.

** Leipziger Berichte Mai und Juli 1897.

Der Zweck dieser Untersuchungen ist eigentlich ein doppelter. Einerseits bietet die Theorie der Integralinvarianten an sich ein so grosses Interesse, dass eine ausführliche Darstellung dieser Lehre als zweckmässig, ja notwendig betrachtet werden muss. Anderseits ist wohl zu beachten, dass die Theorie der Integralinvarianten im höchsten Masse dazu geeignet ist, besonders lehrreiche Illustrationen zu meinen allgemeinen Integrationstheorien zu liefern. Seit dem Anfange der siebziger Jahren habe ich eine Reihe fundamentaler Integrationstheorien entwickelt, in denen ausgedehnte Categorien von Differentialgleichungen durch rationelle gruppentheoretische Methoden erledigt werden, die mit *Lagrange's*, *Abels'* und *Galois'* Behandlung der algebraischen Gleichungen durchgreifende Analogien darbieten. *Diese meine allgemeinen Untersuchungen, in denen viele specielle Resultate meiner Nachfolger anticipirt worden sind, haben noch nicht die allgemeine Beachtung gefunden, die sie entschieden verdienen.* Es beruht dies wahrscheinlicherweise in erster Linie darauf, dass meine Theorien fast immer in *abstracter* Form entwickelt worden sind*. Darum versuche ich jetzt wie auch in früheren Publicationen, *lehrreiche* und *interessante Beispiele* zu meinen allgemeinen Theorien im Einzelnen duchzuführen. Schliesslich wird es mir wohl einmal gelingen, *der mathematischen Welt klar zu machen, dass gerade die Differentialgleichungen dasjenige Gebiet liefern, innerhalb dessen die capitale Bedeutung meiner Gruppentheorie sich am stärksten geltend macht.* Es ist eben ein charakteristiches Merkmal der Gruppentheorie, dass sie einerseits schwierige Probleme erledigt, und dass sie anderseits *genau feststellt, was unter gegebenen Voraussetsungen geleistet werden kann.*

Vielleicht kann es nützlich sein, ehe ich den speciellen Gegenstand dieser Abhandlung in Angriff nehme, auf einige unter meinen allgemeinen Integrationstheorien hinzuweisen.

Die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung $(n-q)^{\text{ter}}$ Ordnung in den Veränderlichen x und y kann bekanntlich immer auf die Erledigung eines q-gliedrigen vollständigen Systems:

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \ldots\ldots X_q f = 0 \qquad (1)$$

in n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zurückgeführt werden,

* Einige unter meinen Schülern finden es zweckmässig, diejenigen unter meinen Integrationstheorien, die von den Jahren 1870—1882 herrühren, einfach zu ignorieren. Es ist aber und bleibt ein geschichtliches Faktum, dass nicht allein die Begründung der Theorie der continuierlichen Gruppen, sondern auch die allgemeine Verwerthung dieser Theorie für Differentialgleichungen von mir herrührt.

und dabei lässt sich immer erreichen, dass die Klammerausdrücke $X_i X_k f - X_k X_i f$ sämtlich identisch verschwinden.

Man weiss andererseits, dass die Integration eines q-gliedrigen vollständigen Systems (1) mit n unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots . x_n$, sich auf die Erledigung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $(n-q)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen lässt; und dabei liegt es in der Natur der Sache, dass diese Hülfsgleichung $(n-q)^{\text{ter}}$ Ordnung im Allgemeinen keine specielle Eigenschaften besitzt, aus denen sich eine Vereinfachung ihrer Integration herleiten liesse.

Ganz anders kann die Sache stehen, wenn ein vollständiges System:

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \ldots \ldots X_q f = 0 \qquad (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

zu Integration vorgelegt ist, und *man von vorneherein gewisse specielle Eigenschaften dieses vollständigen Systems schon kennt.*

Ganz besonders eingehend habe ich mich* in den Jahren 1872 und 1874 mit der Annahme beschäftigt, dass *gewisse infinitesimale Transformationen:* $Y_1 f, \; Y_2 f, \ldots Y_p f$, die das vollständige System invariant lassen, und anderseits *gewisse Lösungen* des vollständigen Systems von vorneherein bekannt sind. In den oben citierten Arbeiten aus den Jahren 1874 und 1882 gab ich die definitive Erledigung des eben formulierten Problems, und *zu dieser weittragenden Theorie konnten spätere Arbeiten anderer Mathematiker nach der Natur der Sache keine neuen und wesentlichen Beiträge hinzuführen***.

Wir können ferner annehmen, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f, \; X_2 f, \ldots . X_r f$ vorgelegt sind, die Relationen von der Form

$$X_i X_k f - X_k X_i f = \sum\nolimits_s c_{iks} X_s f \qquad (c_{iks} = \text{Const.})$$

erfüllen, und dass man alle Lösungen des Gleichungs-System

$$X_1 f = 0, \ldots \ldots X_r f = 0 \qquad (2)$$

anders ausgesprochen, alle Invarianten $U(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots . X_r f$ bestimmen will. Finden sich unter den Gleichungen (2) etwa q unabhängige, so bilden diese q Gleichungen

* Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1872 und 1874. Math. Ann. Bd. IX. Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1882. Ein Resumé dieser Theorien findet sich in Math. Ann. Bd. XXV.

** Meine Nachfolger und Schüler haben einige neue *Anwendungen* meiner Integrationstheorien geliefert. Es scheint aber ihrer Aufmerksamkeit entgangen zu sein, wie minimal die verbindende Brücke ist.

$$X_1 f = 0, \ldots . . X_q f = 0$$

ein vollständiges System, dessen $n-q$ Lösungen gerade die gesuchten Invarianten liefern. Will man nun die Integration dieses vollständigen System in rationeller, das heisst, in einfachst möglicher Weise durchführen, so muss man in erster Linie untersuchen, ob infinitesimale Transformationen Yf vorhanden sind, die mit allen r Transformationen $X_1 f, \ldots . X_r f$ vertauschbar sind. Giebt es keine derartige Transformationen Yf, so kann die Integration des vollständigen System $X_1 f = 0, \ldots X_q f = 0$ durch ausführbare Operationen geleistet werden. Sind dagegen infinitesimale Transformationen Yf vorhanden, die mit allen $X_k f$ vertauschbar sind, so bilden alle Yf ihrerseits eine continuirliche endliche oder unendliche Gruppe, und es ist die *Zusammensetzung dieser Gruppe Yf, die das vorliegende Integrationsproblem beherrscht*[2]).

Es kann vielleicht nützlich sein, dass wir in aller Kürze daran erinnern, wie wir dieses Problem auf das zuerst besprochene Problem zurückgeführt haben. Sind $X_1 f, \ldots . X_r f$, r unabhängige infinitesimale Transformationen der vorgelegten Gruppe, so können wir immer annehmen, dass wir eine kanonische Form dieser Gruppe

$$X_k' f = \sum \xi_{ki} (x_1', \ldots . x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

und gleichzeitig die reciproke Gruppe

$$Y_k' f = \sum{}^{i} \eta_{ki}' (x_1', \ldots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

der letzten Gruppe kennen.

Unser Problem deckt sich sodann mit der Reduktion der vorgelegten Gruppe $X_1 f, \ldots X_r f$ auf ihre kanonische Form und findet daher seinen analytischen Ausdruck in den r Gleichungen

$$X_k f = X_k' f$$

oder eigentlich in den $r.n$ Gleichungen, die hervorgehen, wenn für f nach und nach $x_1', x_2', \ldots . x_n'$ gesetzt wird. Hiermit erhalten wir ein System partieller Differentialgleichungen

$$\Omega_k (x_1, x_2, \ldots . x_n, x_1' \ldots x_n', \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}, \ldots .) = 0$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots .$$

deren allgemeinste Lösungen $y_1', y_2', \ldots y_n'$ aus einem speciellen Lösungssystem $x_1', \ldots x_n'$ durch ***bekannte*** Gleichungen

$$y_i' = \varphi_i(x_1', \ldots x_n', b_1, \ldots)$$

hervorgehen, die eine Gruppe und zwar gerade die kanonische reciproke Gruppe bilden. Nachdem wir aber unser Problem auf diese Gestalt gebracht haben, können wir es in bekannter Weise auf die Form einer linearen partiellen Differentialgleichung: $Af = 0$ bringen, deren Charakteristiken von einer einfach transitiven Gruppe transformirt werden, die mit der Gruppe $Y_k' f$ gleichzusammengesetzt ist. —

Bestehen Gleichungen von der Form:

$$X_{q+k} f = \varphi_{k1}(x) X_1 f + \ldots. + \varphi_{kq} X_q f$$

$$(q + k = q + 1, \ldots. r)$$

sowie die analogen Gleichungen

$$X'_{q+k} f = \varphi_{k1}'(x') X_1' f + \ldots + \varphi_{kq}' X_q' f$$

so kann man

$$\varphi_{ki}(x) = \varphi_{ki}'(x')$$

setzen und findet hiermit unter allen Umständen ohne Integration gewisse endliche Relationen zwischen den x und x'.

Reducirt sich insbesondere die reciproke Gruppe $Y_k' f$ auf die identische Transformation, so leistet das Gleichungssystem $\varphi_{ki}(x) = \varphi_{ki}'(x')$ unmittelbar die Überführung der Gruppe $X_1 f, \ldots\ldots. X_r f$ auf ihre kanonische Form, gleichzeitig also die Erledigung des vorliegenden Problems[8]).

Wir denken uns wiederum, dass ein vollständiges System

$$X_1 f = 0, \ldots.. X_q f = 0$$

zur Integration vorgelegt ist und wollen dabei annehmen, dass alle Klammerausdrücke $X_i X_k f - X_k X_i f$ identisch gleich Null sind. Wir setzen überdies voraus, dass ein System oder mehrere Systeme partieller Differentialgleichungen in den x vorgelegt sind, unter denen jedes einzelne System bei allen $X_k f$ invariant bleibt. Man kann sich dann die Frage vorlegen, welcher Vorteil aus diesem Umstande für die Integration des vollständigen Systems $X_1 f = 0, \ldots X_q f = 0$ gezogen werden kann. In unseren älteren Arbeiten ist dieses Problem jedenfalls implicite erledigt worden, bei dieser Gelegenheit werden wir uns darauf beschränken, einige allgemeine Bemerkungen über diese Fragestellung zu machen.

Es ist unter allen Umständen möglich zu entscheiden, ob die vorgelegten $X_\varkappa f$ die einzigen infinitesimalen Transformationen sind, welche sämtliche bekannte Systeme von Differentialgleichungen invariant lassen oder nicht[4]).

Giebt es keine weitere infinitesimale Transformationen, die unsere Forderungen erfüllen, so findet man *alle Lösungen* des vollständigen Systems $X_1 f = 0, \ldots\ldots X_q f = 0$ ohne Integration[5]). Giebt es dagegen noch weitere infinitesimale Transformationen Yf, die alle vorgelegten Systeme partieller Differentialgleichungen invariant lassen, so kann man, selbst wenn die Yf unnbekannt sind, *alle gemeinsamen Lösungen* der Gleichungen

$$X_k f = 0, \qquad Yf = 0$$

ohne Integration finden[6]).

Wir behalten uns vor, gelegentlich eine vollständige Erledigung des hier gestreiften Problems zu liefern.

In dieser Abhandlung denken wir uns, dass man die Invarianten $u(x_1, \ldots . x_n)$ einer vorgelegten r gliedrigen Gruppe $X_1 f, \ldots . X_r f$ finden will, und dass man zufälligerweise eine oder mehrere Integralinvarianten dieser r gliedrigen Gruppe von vorneherein kennt. Wir fragen, welchen Vortheil man aus diesem Umstande für die Integration des Gleichungssystems

$$X_1 f = 0, \ldots . X_r f = 0$$

ziehen kann. Im ersten Abschnitte dieser Arbeit geben wir die detaillirte Behandlung eines allerdings speciellen, immerhin aber recht umfangreichen und jedenfalls sehr instructiven speciellen Falles des soeben formulirten Problems, dessen allgemeine Erledigung im zweiten Abschnitte geliefert wird[7]).

Offenbar wäre es möglich, noch viel allgemeinere Probleme zu stellen, die in ganz ähnlicher Weise von meinen allgemeinen Principien beherrscht werden. Sucht man z. B. die Invarianten $u(x_1, \ldots x_n)$ einer vorgelegten endlichen continuirlichen Gruppe, so kann man annehmen, dass gewisse derartige Invarianten schon vorliegen, dass andererseits gewisse infinitesimale Transformationen Yf bekannt sind, die unsere Gruppe in sich transformieren, und dass endlich gewisse Systeme von Differentialgleichungen und gewisse Integrale vorliegen, die bei der Gruppe $X_1 f, \ldots . X_r f$ invariant sind. Meine allgemeinen Theorien gestatten in jedem einzelnen Falle genau festzustellen, welchen Vortheil man aus den vorliegenden Umständen für die Bestimmung aller Invarianten $u(x_1, \ldots x_n)$ der vorgelegten Gruppe ziehen kann.

In vielen früheren Abhandlungen beschäftigten wir uns mit dem folgenden Probleme:

Eine continuierliche Gruppe liegt vor; man will die Bahncurven einer infinitesimalen Transformation dieser Gruppe (oder überhaupt die Invarianten einer Untergruppe) bestimmen. Wir haben eine allgemeine Erledigung dieses Problems geliefert. Es ist leicht, den Zusammenhang der oben besprochenen allgemeinen Fragestellungen mit diesen Problem zu erkennen. Sucht man nämlich z. B. die Bahnkurven einer Transformation Xf und kennt man eine zugehörige Integralinvariante, so weiss man, dass alle Transformationen Yf, die dieses Integral invariant lassen und mit Xf vertauschbar sind, eine Gruppe erzeugen, und in dieser allerdings unbekannten Gruppe ist Xf jedenfalls enthalten.

Kapitel I.

Vertauschbare infinitesimale Transformationen mit einer zweidimensionalen Integralinvariante.

In diesem Kapitel stellen wir ein allgemeines Integrationsproblem, bei dessen Behandlung eine Reihe wesentlich verschiedener Fälle eintreten können. Das betreffende Problem bezieht sich auf ein Integral

$$\int \psi \, dx_1 \, dx_2$$

das über eine zweidimensionale Punkt-Mannigfaltigkeit erstreckt wird und daher von uns kurz weg als ein *zweidimensionales Integral* bezeichnet wird.

Problem: *Im vierfachen Raume $x_1 x_2 x_3 x_4$ liegen zwei vertauschbare infinitesimale Transformationen*

$$X_k f = \xi_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{k2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_{k3} \frac{\partial f}{\partial x_3} + \xi_{k4} \frac{\partial f}{\partial x_4} \quad (k = 1,2)$$

mit verschiedenen Bahncurven vor. Man kennt von vorneherein eine zweidimensionale Integralinvariante erster Ordnung der beiden Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ nämlich das Integral

$$\int \psi \left(x_1, x_2, x_3, x_4, \frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2}\right) dx_1 \, dx_2,$$

dessen Argument ψ in den fünf Grössen

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_4}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} - \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}$$

linear ist. Es soll das Vorhandsein dieser Integralinvariante bei der Integration des vollständigen Systems

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0$$

so viel wie möglich verwerthet werden.

Da die Grösse

$$\psi = A\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + B\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + C\frac{\partial x_4}{\partial x_1} + D\frac{\partial x_4}{\partial x_2} + E\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} - \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}\right) + F$$

sechs Coefficienten $A, B, \ldots F$ enthält, die ganz beliebige[8] Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4 sein können, so umfasst die gestellte Aufgabe eine ausgedehnte Categorie von Problemen. Wir behaupten und werden zunächst beweisen, dass alle diese Probleme in dem Sinne eine natürliche Familie bilden, dass der *Inbegriff* dieser Probleme bei jeder Coordinatentransformation des Raumes $x_1 \ldots x_4$ invariant bleibt.

Führen wir in das Integral $\int \psi \, dx_1 \, dx_2$ neue Veränderliche $x_1', \ldots x_4'$ vermöge der Substitution

$$x_k' = F_k(x_1 \ldots x_4) \qquad (k = 1, \ldots 4)$$

ein, so wird die Beziehung zwischen dem transformierten Integral:

$$\int \psi' \, dx_1' \, dx_2'$$

und dem ursprünglichen Integral durch die Gleichung

$$\psi' = \psi : \sum \pm \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) = \psi : \Delta \tag{1}$$

festgestellt, und dabei ist[9])

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \frac{\partial F_i}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial F_i}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial x_4}{\partial x_1}$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial F_i}{\partial x_2} + \frac{\partial F_i}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial F_i}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial x_4}{\partial x_2}$$

$$(i = 1, 2)$$

Es bestehen die Gleichungen

$$dx_3' = \frac{\partial x_3'}{\partial x_1'} dx_1' + \frac{\partial x_3'}{\partial x_2'} dx_2' \quad , \quad dx_4' = \frac{\partial x_4'}{\partial x_1'} dx_1' + \frac{\partial x_4'}{\partial x_2'} dx_2'$$

sowie die æquivalenten:

$$dF_3 = \frac{\partial x_3'}{\partial x_1'} dF_1 + \frac{\partial x_3'}{\partial x_2'} dF_2 \quad , \quad dF_4 = \frac{\partial x_4'}{\partial x_1'} dF_1 + \frac{\partial x_4'}{\partial x_2'} dF_2 ,$$

und aus ihnen erhalten wir in bekannter Weise die Relationen[10]).

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial x_3'}{\partial x_1'}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial x_3'}{\partial x_2'}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right),$$

$$\left(\frac{\partial F_4}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial x_4'}{\partial x_1'}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial x_4'}{\partial x_2'}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right)$$

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial x_3'}{\partial x_1'}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial x_3'}{\partial x_2'}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial F_4}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial x_4'}{\partial x_1'}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial x_4'}{\partial x_2'}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)$$

und durch Auflösung die bekannten Formeln

$$\Delta\frac{\partial x_3'}{\partial x_1'}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right),$$

$$\Delta\frac{\partial x_3'}{\partial x_2'}=-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right),$$

$$\Delta\frac{\partial x_4'}{\partial x_1'}=\left(\frac{\partial F_4}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)-\left(\frac{\partial F_4}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right),$$

$$\Delta\frac{\partial x_4'}{\partial x_2'}=-\left(\frac{\partial F_4}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial F_4}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right).$$

Hierzu fügen wir die Formel

$$\Delta\left(\frac{\partial x_3'}{\partial x_1'}\frac{\partial x_4'}{\partial x_2'}-\frac{\partial x_4'}{\partial x_1'}\frac{\partial x_3'}{\partial x_2'}\right)=\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial F_4}{\partial x_2}\right)-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial F_4}{\partial x_1}\right)$$

die aus dem Multiplicationssatze der Determinanten hervorgeht.

In diesen fünf Formeln haben die rechten Seiten sowie Δ die gemeinsame Form[11]):

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)-\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)=\begin{vmatrix}U & V\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}U & V\\ x_3 & x_2\end{vmatrix}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}+\begin{vmatrix}U & V\\ x_4 & x_2\end{vmatrix}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}$$

$$+\begin{vmatrix}U & V\\ x_1 & x_3\end{vmatrix}\frac{\partial x_3}{\partial x_2}+\begin{vmatrix}U & V\\ x_1 & x_4\end{vmatrix}\frac{\partial x_4}{\partial x_2}+\begin{vmatrix}U & V\\ x_3 & x_4\end{vmatrix}\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2}-\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}\right)$$

Es ergiebt sich also, dass zwischen den *fünf* Grössen

$$(2)\qquad \frac{\partial x_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial x_3}{\partial x_2},\ \frac{\partial x_4}{\partial x_1},\ \frac{\partial x_4}{\partial x_2},\quad \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2}-\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}$$

und den fünf transformierten Grössen

$$(3)\qquad \frac{\partial x_3'}{\partial x_1'},\ \frac{\partial x_3'}{\partial x_2'},\ \frac{\partial x_4'}{\partial x_1'},\ \frac{\partial x_4'}{\partial x_2'},\quad \frac{\partial x_3'}{\partial x_1'}\frac{\partial x_4'}{\partial x_2'}-\frac{\partial x_3'}{\partial x_2'}\frac{\partial x_4'}{\partial x_1'}$$

eine projective Beziehung besteht, so zwar dass jede einzelne unter den fünf Grössen (3) multiplicirt mit Δ sich *linear* durch die fünf Grössen (2) multiplicirt mit Funktionen der x ausdrückt.

Wir sahen aber schon, dass

$$\psi' = \psi : \Delta$$

ist, und also können wir schliessen, dass, wenn ψ die Form

$$\psi = A\frac{\partial x_3}{\partial x_1}+B\frac{\partial x_3}{\partial x_2}+C\frac{\partial x_4}{\partial x_1}+D\frac{\partial x_4}{\partial x_2}+E\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2}-\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}\right)+F$$

besitzt, dann ψ' die ähnliche Form

$$\psi' = A'\frac{\partial x_3'}{\partial x_1'}+B'\frac{\partial x_3'}{\partial x_2'}+C'\frac{\partial x_4'}{\partial x_1'}+D'\frac{\partial x_4'}{\partial x_2'}+E'\left(\frac{\partial x_3'}{\partial x_1'}\frac{\partial x_4'}{\partial x_2'}-\frac{\partial x_3'}{\partial x_2'}\frac{\partial x_4'}{\partial x_1'}\right)+F'$$

annehmen muss.

Es gilt also der

Satz 1: *Liegt in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$ ein Integral vor, das über zweidimensionale Mannigfaltigkeiten $x_3 = L(x_1, x_2)$, $x_4 = M(x_1, x_2)$ erstreckt ist und die Form*

$$\int\left\{A\frac{\partial x_3}{\partial x_1}+B\frac{\partial x_3}{\partial x_2}+C\frac{\partial x_4}{\partial x_1}+D\frac{\partial x_4}{\partial x_2}+E\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2}-\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}\right)+F\right\}dx_1\,dx_2$$

besitzt, so erhält dieses Integral durch Einführung neuer Veränderlichen:

$$x_k' = F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

immer die analoge Form:

$$\int\left\{A'\frac{\partial x_3'}{\partial x_1'}+B'\frac{\partial x_3'}{\partial x_2'}+C'\frac{\partial x_4'}{\partial x_1'}+D'\frac{\partial x_4'}{\partial x_2'}+E'\left(\frac{\partial x_3'}{\partial x_1'}\frac{\partial x_4'}{\partial x_2'}-\frac{\partial x_3'}{\partial x_2'}\frac{\partial x_4'}{\partial x_1'}\right)+F'\right\}dx_1'\,dx_2'$$

Die Coefficienten A', B', … F' sind Funktionen der x', deren Form einerseits von der Form der Funktionen $A(x_1 \ldots x_4)$, B, … F, andererseits von der Transformation $x_k' = F_k(x_1 \ldots x_4)$ abhängt.

Wir halten es für richtig, auf den begrifflichen Inhalt des eben aufgestellten Satzes näher einzugehen.

Im vierfachen Raume $x_1 \dots x_4$ giebt es ∞^7 *Linienelemente*, x_1, x_2, x_3, x_4, $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4$, ferner ∞^7 Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, $\frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_3}$ *dreidimensionaler* Mannigfaltigkeiten: $x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ und endlich ∞^8 Elemente x_1, x_2, x_3, x_4 $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2}$ *zweidimensionaler* Mannigfaltigkeiten $x_3 = M(x_1, x_2)$, $x_4 = N(x_1, x_2)$.

Betrachten wir nun alle Elemente eindimensionaler, zweidimensionaler und dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, die durch einen bestimmten Punkt x_1, x_2, x_3, x_4 hindurchgehen, so müssen wir sagen,

dass durch einen Punkt $x_1 \dots x_4$ des vierfachen Rames ∞^8 Linienelemente $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4$ gehen, die ihrerseits eine ***dreidimensionale ebene Mannigfaltigkeit*** M_3 bilden,

dass die ∞^4 durch den gewählten Punkt gehenden Elemente $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2}$ zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten $x_3 = M(x_1, x_2)$, $x_4 = N(x_1, x_2)$ im dreidimensionalen ebenen Raume M_3 die Rolle der *Geraden* spielen,

dass endlich die ∞^3 durch den gewählten Punkt x_k gehenden Elemente $\frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_3}$ dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten $x_4 - \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ im dreifachem Raume M_3 die Rolle der *Ebenen* spielen.

Im dreifachen Raume M_3 müssen wir daher die Grössen dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 als ***homogene*** Punktcoordinaten, ihre Verhältnisse dementsprechend als ***absolute*** Punktcoordinaten auffassen. Wir müssen ferner die drei Ableitungen $\frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_3}$ als ***Ebenencoordinaten*** und endlich ***die vier Ableitungen*** $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2}$ als ***Liniencoordinaten*** des dreifachen Raumes M_3 betrachten[12]). Dabei können wir nach dem Vorgange von *Plücker* die Determinante

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} - \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}$$

als ***fünfte*** Liniencoordinate des Raumes M_3 einführen.

Bei dieser Auffassung sagt unser Satz 1, dass die fünf Liniencoordinaten des Raumes M_3

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} - \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}$$

bei jeder Punkttransformation des vierfachen Raumes $x_1 \ldots x_4$ *projektiv* transformirt werden. Und das liesse sich a priori ohne Rechnung aus der bekannten Thatsache herleiten, dass jede Punkttransformation des n fachen Raumes im Infinitesimalen projectiv ist[13]).

Wenn wir auch befürchten müssen, dass die eben vorgetragenen Betrachtungen nur für Geometer, die mit den Elementen der Plückerschen Liniengeometrie vertraut sind, leicht verständlich sind, so haben wir sie doch nicht zurückhalten wollen. Es ist eben unsere Überzeugung, dass es richtig ist, die principiellen Fortschritte der Geometrie für die Analysis zu verwerthen. In der That gewinnt die ganze Theorie, die wir in dieser Abhandlung darstellen, an Durchsichtigkeit und Einfachkeit, wenn wir die Grundlagen der Plückerschen Liniengeometrie als bekannt voraussetzen.

Indem wir nun das oben gestellte Problem in Angriff nehmen, finden wir es zweckmässig, zunächst *die allgemeinste Transformation*

$$x_k' = F_k(x_1 \ldots x_4) \qquad (k = 1, \ldots 4)$$

zu suchen, die sowohl die Form der beiden infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ *und* $X_2 f$, *wie die Form der bekannten Integralinvariante* $\int \psi \, dx_1 \, dx_2$ *bewahrt.* Die endlichen Transformationen der zweigliedrigen Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$ besitzen offenbar diese Eigenschaft; unter Umständen giebt es aber noch weitere Transformationen, die unsere Forderungen erfüllen. Es liegt in der Natur der Sache, dass der Inbegriff aller Transformationen $x_k' = F_k(x_1 \ldots x_4)$, bei denen die Form von $X_1 f$, $X_2 f$ und $\int \psi \, dx_1 \, dx_2$ bewahrt wird[14]), eine Gruppe G bildet. Wir werden sehen, dass *diese Gruppe* G *das ursprünglich gestellte Problem beherrscht* und dass z. B. die Integration des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ nur Differentiationsprocesse verlangt, wenn die Gruppe G keine anderen infinitesimalen Transformationen als $X_1 f$ und $X_2 f$ enthält.

Es wird sich zeigen, dass die Gruppe G viele wesentlich verschiedene Formen haben kann. Während sie unter Umständen, ja im Allgemeinen nur die beiden infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ umfasst, kann sie in speciellen Fällen sogar eine *unendliche* Gruppe darstellen. Die Gruppe G vertauscht eo ipso die ∞^2 charackteristischen Mannigfaltigkeiten $u = a$, $v = b$ des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ unter

einander. Dabei ist es, werden wir sehen, denkbar, dass G das zweidimensionale Gebiet u, v in *allgemeinster* Weise transformiert und dass diese Gruppe dementsprechend mit der Gruppe *aller* Punkttransformationen einer Ebene *gleichzusammengesetzt* ist. In diesem speciellen Falle, der als ein Ausnahmefall aufgefasst werden muss, lässt sich aus dem Vorhandsein der bekannten Integralinvariante $\int \psi dx_1\, dx_2$ gar kein Vortheil für die Integration des vollständigen Systems: $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ ziehen.

Um in einfacher Weise die kanonischen Formen zu finden, auf welche G in den verschiedenen Fällen gebracht werden kann, denken wir uns zunächst statt $x_1 \dots x_4$ solche neue unabhängige Veränderliche

$$x, y, z, \mathfrak{z}$$

eingeführt, dass $X_1 f$ und $X_2 f$ die kanonische Formen

$$X_1 f = z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_2 f = \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

annehmen[15]). Ist dann

$$\int \psi \, dx \, dy$$

die entsprechende Form der bekannten Integralinvariante, so können wir setzen

$$\psi = \alpha p + \beta q + \gamma \mathfrak{p} + \delta \mathfrak{q} + \varepsilon (p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q) + \varphi,$$

dabei vorausgesetzt, dass wir die abgekürzten Bezeichnungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} = \mathfrak{p}, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} = \mathfrak{q}$$

einführen. Und da $X_1 f$ und $X_2 f$ bei einmaliger Erweiterung die Gestalten

$$X_1' f = z \frac{\partial f}{\partial z} + p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q}$$

$$X_2' f = \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} + \mathfrak{p} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}} + \mathfrak{q} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}}$$

erhalten, so zerlegen sich die Bedingungsgleichungen für die Invarianz unseres Integrals[16])

$$0 = (\alpha_z z + \alpha) p + (\beta_z z + \beta) q + z \gamma_z \mathfrak{p} + z \delta_z \mathfrak{q} + (z \varepsilon_z + \varepsilon)(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q) + z \varphi_z \equiv X_1' \psi$$

$$0 = \mathfrak{z}\alpha_{\mathfrak{z}} p + \mathfrak{z}\beta_{\mathfrak{z}} q + (\mathfrak{z}\gamma_{\mathfrak{z}} + \gamma)\,\mathfrak{p} + (\mathfrak{z}\delta_{\mathfrak{z}} + \delta)\,\mathfrak{q} + (\mathfrak{z}\varepsilon_{\mathfrak{z}} + \varepsilon)(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q) + \mathfrak{z}\varphi_{\mathfrak{z}} \equiv X_2'\,\psi$$

in die zwölf Relationen

$$0 = z\alpha_z + \alpha = z\beta_z + \beta = z\gamma_z = z\delta_z = z\varepsilon_z + \varepsilon = z\varphi_z,$$

$$0 = \mathfrak{z}\alpha_{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}\beta_{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}\gamma_{\mathfrak{z}} + \gamma = \mathfrak{z}\delta_{\mathfrak{z}} + \delta = \mathfrak{z}\varepsilon_{\mathfrak{z}} + \varepsilon = \mathfrak{z}\varphi_{\mathfrak{z}},$$

die uns zeigen, dass die Coefficienten α, $\beta, \ldots \varphi$ die Form

$$\alpha = \frac{A(x, y)}{z}, \quad \beta = \frac{B(x, y)}{z}, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{A}(x, y)}{\mathfrak{z}}, \quad \delta = \frac{\mathfrak{B}(x, y)}{\mathfrak{z}}$$

$$\varepsilon = \frac{C(x, y)}{z\mathfrak{z}}, \quad \varphi = D(x, y)$$

besitzen. Das vorliegende Integral erhält daher in den kanonischen Veränderlichen x, y, z, $\mathfrak{z}$, die Form:

$$(4) \qquad \int\left\{\frac{Ap + Bq}{z} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}} + \frac{C(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}} + D\right\} dx\, dy$$

und es sind die Coefficienten A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, C und D Funktionen und zwar willkürliche Funktionen von x und y.

Wir suchen jetzt die Gruppe G, deren Transformationen die Form der beiden infinitesimalen Transformationen $X_1 f$, $X_2 f$ sowie die Form des vorliegenden Integrals (4) bewahren, und zwar werden wir zunächst alle infinitesimale Transformationen

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \bar{\omega} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

bestimmen, die unsere Forderungen erfüllen.

Das Verlangen, dass $X_1 f$ und $X_2 f$ bei der Transformation Uf ihre Form bewahren sollen, findet nach meinen allgemeinen Theorien seinen analytischen Ausdruck darin, dass Uf sowohl mit $X_1 f$ wie mit $X_2 f$ *vertauschbar*[17]) sein soll, was wieder heisst, dass die Relationen

$$X_1\, Uf - U X_1 f = 0, \qquad X_2\, Uf - U X_2 f = 0$$

bestehen, und dass Uf dementsprechend die Form[18])

$$Uf = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} + z.\,\alpha(x, y) \frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}.\,\beta(x, y) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

besitzt, wobei ξ, η, α und β Funktionen von x, y bezeichnen, die durch die Bedingungsgleichung

$$(5) \qquad U'\psi + (\xi_x + \eta_y)\psi = 0$$

näher bestimmt werden[16].

Durch einmalige Erweiterung von Uf erhalten wir die Formel:

$$U'f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} +$$

$$+ (p\alpha + z\alpha_x - p\xi_x - q\eta_x)\frac{\partial f}{\partial p} + (q\alpha + z\alpha_y - p\xi_y - q\eta_y)\frac{\partial f}{\partial q} +$$

$$+ (\mathfrak{p}\beta + \mathfrak{z}\beta_x - \mathfrak{p}\xi_x - \mathfrak{q}\eta_x)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}} + (\mathfrak{q}\beta + \mathfrak{z}\beta_y - \mathfrak{p}\xi_y - \mathfrak{q}\eta_y)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}}$$

Die Bedingungsgleichung (5) erhält daher, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = \bar{U}f,$$

die Gestalt:

$$\frac{[\bar{U}(A) - \alpha A]p + [\bar{U}(B) - \alpha B]q}{z} + \frac{[\bar{U}(\mathfrak{A}) - \beta\mathfrak{A}]\mathfrak{p} + [\bar{U}(\mathfrak{B}) - \beta\mathfrak{B}]\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}}$$

$$+ \frac{[\bar{U}(C) - C(\alpha + \beta)](p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}} + \bar{U}D +$$

$$+ \frac{A(p\alpha + z\alpha_x - p\xi_x - q\eta_x) + B(q\alpha + z\alpha_y - p\xi_y - q\eta_y)}{z}$$

$$+ \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{p}\beta + \mathfrak{z}\beta_x - \mathfrak{p}\xi_x - \mathfrak{q}\eta_x) + \mathfrak{B}(\mathfrak{q}\beta + \mathfrak{z}\beta_y - \mathfrak{p}\xi_y - \mathfrak{q}\eta_y)}{\mathfrak{z}}$$

$$+ \frac{C[(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)(\alpha + \beta - \xi_x - \eta_y) + p\mathfrak{z}\beta_y - q\mathfrak{z}\beta_x - \mathfrak{p}z\alpha_y + \mathfrak{q}z\alpha_x]}{z\mathfrak{z}}$$

$$+ (\xi_x + \eta_y)\left[\frac{Ap + Bq}{z} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}} + \frac{C(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}} + D\right] = 0$$

und zerlegt sich daher in die sechs Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
-C\beta_y &= A\eta_y - B\xi_y + \xi A_x + \eta A_y\,,\\
C\beta_x &= -A\eta_x + B\xi_x + \xi B_x + \eta B_y\,,\\
C\alpha_y &= -\mathfrak{B}\xi_y + \mathfrak{A}\eta_y + \xi\mathfrak{A}_x + \eta\mathfrak{A}_y\,,\\
-C\alpha_x &= \mathfrak{B}\xi_x - \mathfrak{A}\eta_x + \xi\mathfrak{B}_x + \eta\mathfrak{B}_y\,,\\
0 &= \xi C_x + \eta C_y\\
0 &= D(\xi_x + \eta_y) + \xi D_x + \eta D_y + A\alpha_x + B\alpha_y + \mathfrak{A}\beta_x + \mathfrak{B}\beta_y\,,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

die in jedem einzelnen Falle die gesuchten infinitesimalen Transformationen Uf vollständig bestimmen.

Die Form dieser sechs Gleichungen zeigt, dass es einen wesentlichen Unterschied macht, ob C eine Constante ist oder nicht. Die fünfte Gleichung

$$\xi C_x + \eta C_y = 0 \tag{7}$$

sagt, dass C unter allen Umständen bei den infinitesimalen Transformationen Uf invariant bleibt. Ist daher C keine absolute Constante, sondern eine wirkliche Funktion von x und y, so ist C eine *Invariante* nullter Ordnung gegenüber allen Uf, die somit in diesem Falle sicher eine *intransitive* Gruppe erzeugen. Ist C dagegen eine absolute Constante, so ist die Bedingung (7) identisch erfüllt, und dann kann die Gruppe, wie wir später sehen werden, unter Umständen transitiv sein.

Ehe wir zur Discussion aller möglichen Fälle übergehen, untersuchen wir das Verhalten unseres Integrals bei Ausführung von Transformationen, welche die kanonische Form der beiden infinitesimalen Transformationen bewahren.

Wenn wir in die beiden infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f = z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_2 f = \mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

und die zugehörige Integralinvariante

$$\int\!\!\int\left(\frac{Ap + Bq}{z} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}} + \frac{C(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}} + D\right) dx\,dy$$

die neuen Veränderlichen

$$x_1 = X(x,y), \quad y_1 = Y(x,y), \quad z_1 = z\Omega(x,y), \quad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}V(x,y) \qquad (8)$$

einführen, so ist es unmittelbar klar, dass die beiden infinitesimalen Transformationen ihre Form bewahren[19]). Hieraus lässt sich ohne Rechnung der Schluss ziehen, dass auch das obenstehende Integral seine allgemeine Form bewahrt, wenn auch seine Coefficienten A, B, C, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ eine neue Gestalt erhalten.

Schon früher (S. 11) haben wir ja gesehen, dass jedes über die Mannigfaltigkeit $z = Z(x,y)$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}(x,y)$ erstrecktes Integral $\int \psi\, dx\, dy$, dessen Argument ψ in den Grössen p, q, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)$ linear ist, bei *jeder* Punkttransformation

$$x_1 = L(x,y,z,\mathfrak{z}), \quad y_1 = M(\ldots), \quad z_1 = N(\ldots.), \quad \mathfrak{z}_1 = P(\ldots.)$$

des vierfachen Raumes x, y, z, $\mathfrak{z}$ seine allgemeine Form bewahrt. Dies bleibt eo ipso insbesondere auch dann wahr, wenn die Coefficienten A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, C, D der Grösse

$$\psi = \frac{Ap + Bq}{z} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}} + \frac{C(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{\mathfrak{z}z} + D$$

nur von x und y abhängen, und andererseits die Variabeländerung die specielle Form (8) besitzt. In diesem besonderen Falle lässt sich überdies mit Leichtigkeit erkennen, dass auch im transformierten Integral $\int \psi' dx_1\, dy_1$ die Coefficienten A_1, B_1, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, C_1 und D_1 der Grösse

$$\psi' = \frac{A_1 p_1 + B_1 q_1}{z_1} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{z}_1} + \frac{C_1(p_1\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{p}_1 q_1)}{z_1\mathfrak{z}_1} + D_1$$

nur von x_1 und y_1 abhängen. Dies folgt unmittelbar daraus, dass die Transformation

$$x_1 = X(x,y), \quad y_1 = Y(x,y), \quad z_1 = z\,.\,\Omega(x,y), \quad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}V(x,y)$$

eben weil sie sowohl

$$X_1 f = z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \text{wie} \quad X_2 f = \mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

invariant lässt, auch jedes bei $X_1 f$ und $X_2 f$ invariante Integral in ein Integral überführen muss, das ebenfalls bei diesen beiden Transformationen invariant bleibt. Das transformirte Integral: $\int \psi' \, dx_1 dy_1$, dessen Argument ψ' jedenfalls in p_1, q_1, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$ und $p_1 \mathfrak{q} - \mathfrak{p}_1 q_1$ linear ist, bleibt aber nur dann bei

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{z}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_1}$$

invariant, wenn die transformirten Coefficienten A_1, B_1, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ und C_1 nur von x_1 und y_1 abhängen.

Indem wir diese Thatsache analytisch bestätigen, werden wir mehrere weitergehende Resultate erhalten, die sich übrigens ebenfalls ohne Rechnung durch synthetische Betrachtungen herleiten liessen.

Wir tragen die Werthe $x_1 = X(x, y)$, ... $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} \,.\, V(x, y)$ in die Gleichung

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0$$

ein und erhalten hierdurch eine in den Differentialen dx, dy lineäre Relation

$$\Omega\,(p dx + q dy) + z\,(\Omega_x\, dx + \Omega_y\, dy) =$$

$$= p_1\,(X_x\, dx + X_y\, dy) + q_1\,(Y_x\, dx + Y_y\, dy),$$

die sich in die beiden Gleichungen

$$\Omega p = X_x p_1 + Y_x q_1 - z\Omega_x,$$

$$\Omega q = X_y p_1 + Y_y q_1 - z\Omega_y$$

zerlegt. Dividieren wir sodann links und rechts mit der Grösse

$$z_1 = z\Omega,$$

so erhalten wir zunächst die Formeln:

$$\frac{p}{z} = X_x \frac{p_1}{z_1} + Y_x \frac{q_1}{z_1} - \frac{\Omega_x}{\Omega},$$

$$\frac{q}{z} = X_y \frac{p_1}{z_1} + Y_y \frac{q_1}{z_1} - \frac{\Omega_y}{\Omega},$$

sodann in entsprechender Weise die analogen Formeln:

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{z}} = X_x \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{z}_1} + Y_x \frac{\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{z}_1} - \frac{V_x}{V},$$

$$\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}} = X_y \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{z}_1} + Y_y \frac{\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{z}_1} - \frac{V_y}{V},$$

und endlich die Gleichung[20]):

$$\frac{p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q}{z\mathfrak{z}} = \frac{p_1\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{p}_1 q_1}{z_1\mathfrak{z}_1}(X_x Y_y - X_y Y_x)$$

$$-\frac{p_1}{z_1}\left(X_x \frac{V_y}{V} - X_y \frac{V_x}{V}\right) - \frac{q_1}{z_1}\left(Y_x \frac{V_y}{V} - Y_y \frac{V_x}{V}\right)$$

$$+\frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{z}_1}\left(X_x \frac{\Omega_y}{\Omega} - X_y \frac{\Omega_x}{\Omega}\right) + \frac{\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{z}_1}\left(Y_x \frac{\Omega_y}{\Omega} - Y_y \frac{\Omega_x}{\Omega}\right) + \frac{\Omega_x V_y - \Omega_y V_x}{\Omega V}.$$

Diese Werthe tragen wir in den Ausdruck

$$\psi = \frac{Ap + Bq}{z} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}} + \frac{C(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}} + D$$

ein und erinnern uns dabei, dass

$$\psi = \psi' \Delta$$

ist, wenn wir die Funktionaldeterminante von X und Y nach x und y mit Δ bezeichnen. Alsdann erhalten wir die Formeln

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= C \\ \Delta \,.\, A_1 &= AX_x + BX_y - C\left(X_x \frac{V_y}{V} - X_y \frac{V_x}{V}\right), \\ \Delta \,.\, B_1 &= AY_x + BY_y - C\left(Y_x \frac{V_y}{V} - Y_y \frac{V_x}{V}\right), \\ \Delta \,.\, \mathfrak{A}_1 &= \mathfrak{A}X_x + \mathfrak{B}X_y + C\left(X_x \frac{\Omega_y}{\Omega} - X_y \frac{\Omega_x}{\Omega}\right), \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\Delta . \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A} Y_x + \mathfrak{B} Y_y + C\left(Y_x \frac{\Omega_y}{\Omega} - Y_y \frac{\Omega_x}{\Omega}\right),$$

$$\Delta . D_1 = C . \frac{\Omega_x V_y - \Omega_y V_x}{\Omega V} - A \frac{\Omega_x}{\Omega} - B \frac{\Omega_y}{\Omega} - \mathfrak{A} \frac{V_x}{V} - B \frac{V_y}{V} + D.$$

In diesen Untersuchungen spielt die Grösse:

$$\omega = CD + \mathfrak{A} B - \mathrm{A}\mathfrak{B}$$

eine hervortretende Rolle. Es lässt sich von vornherein erkennen, dass diese Grösse bei *jeder* Punkttransformation des Raumes $x, y, z, \mathfrak{z}$ in dem Sinne als Invariante auftritt, dass das Verschwinden oder Nichtverschwinden dieser Grösse von Variabel-Aenderungen unberührt bleibt.

Um dies in einfacher Weise einzusehen, deuten wir wie früher die Grössen

$$p, q, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q$$

als Liniencoordinaten des dreifachen ebenen Raumes M_3, der von allen Linienelementen $dx : dy : dz : d\mathfrak{z}$ durch einen bestimmten Punkt gebildet wird. Die Gleichung:

$$0 = \psi \equiv \frac{Ap + Bq}{z} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}} + \frac{C(p\mathfrak{q} - p\mathfrak{q})}{z\mathfrak{z}} + D$$

definiert bei dieser Auffassung einen *linearen Liniencomplex* des Raumes M_3, dessen Coordinaten $dx : dy : dz : d\mathfrak{z}$ bei der Punkttransformation: $x_1 = X(x,y) \ldots \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} V(x,y)$ linear und homogen, nämlich durch die Gleichungen:

$$dx_1 = X_x dx + X_y dy, \qquad dy_1 = Y_x dx + Y_y dy,$$

$$dz_1 = \Omega dz + z(\Omega_x dx + \Omega_y dy),$$

$$d\mathfrak{z}_1 = V d\mathfrak{z} + \mathfrak{z}(V_x dx + V_y dy)$$

transformirt werden. Aus der Liniengeometrie ist es aber bekannt, dass bei dieser Transformation die Grösse

$$CD + \mathfrak{A}B - A\mathfrak{B} = \omega$$

im Sinne der projectiven Geometrie oder sagen wir lieber im Sinne der *Cayley*'schen Invariantentheorie sich als Invariante verhält[21]).

Analytisch ergiebt sich das hiermit gefundene Resultat unmittelbar, wenn wir die obenstehenden Werthe der Grössen A_1, B_1, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, C_1 und D_1 in den Ausdruck:

$$C_1 D_1 + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 - A_1 \mathfrak{B}_1$$

einführen. Hierbei erhalten wir nämlich die Formel:

$$\Delta (C_1 D_1 + \mathfrak{A}_1 B_1 - A_1 \mathfrak{B}_1) = CD + \mathfrak{A}B - A\mathfrak{B}.$$

Jetzt können wir noch weitere Schlüsse ziehen, die sich auf den speciellen Fall:

$$C = 0$$

beziehen. In diesem Falle erhalten die obenstehenden Ausdrücke der Grössen $A_1, B_1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, D_1$ die einfache Form

$$\Delta . A_1 = AX_x + BX_y, \qquad \Delta . B_1 = AY_x + BY_y$$

$$\Delta . \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}X_x + \mathfrak{B}X_y, \qquad \Delta . \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}Y_x + \mathfrak{B}Y_y$$

$$\Delta . D_1 = - A\frac{\Omega_x}{\Omega} - B\frac{\Omega_y}{\Omega} - \mathfrak{A}\frac{V_x}{V} - \mathfrak{B}\frac{V_y}{V} + D.$$

Die letzte Formel zeigt, dass es, sobald A, B, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht sämmtlich gleich Null sind, immer möglich ist, die Grössen Ω und V derart zu wählen, dass D_1 verschwindet.

Ist überdies

$$A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B \neq 0,$$

so kann X und Y so gewählt werden, dass A_1 und $\mathfrak{B}_1$ gleich Null werden[22]).

Wir wollen jetzt annehmen, dass der Coefficient C constant ist. Multiciplieren wir die auf Seite 17 gefundene Formel

$$0 = D(\xi_x + \eta_y) + D_x\xi + D_y\eta + A\alpha_x + B\alpha_y + \mathfrak{A}\beta_x + \mathfrak{B}\beta_y$$

mit C und tragen sodann in ihr die auf derselben Seite gegebenen Werthe der Grössen $C\alpha_x$, $C\alpha_y$, $C\beta_x$, $C\beta_y$ ein, so erhalten wir, indem wir zur Abkürzung:

$$CD + \mathfrak{A}B - A\mathfrak{B} = \omega$$

setzen, die Gleichung

$$\omega(\xi_x + \eta_y) + \omega_x \xi + \omega_y \eta = 0$$

die uns zeigt, dass ω ***einen gemeinsamen Multiplicator aller*** $\bar{U}f$ ***darstellt***[23]).

Differentiiren wir andererseits die erste Gleichung (6) nach x und die zweite nach y und addieren die Resultate, so erhalten wir die Integrabilitätsbedingung

$$0 = \xi(A_{xx} + B_{xy}) + \eta(A_{xy} + B_{yy}) + (\xi_x + \eta_y)(A_x + B_y)$$

oder wenn wir

$$A_x + B_y = \varrho$$

setzen, die Gleichung

$$\varrho(\xi_x + \eta_y) + \varrho_x \xi + \varrho_y \eta = 0$$

die uns zeigt, dass ***auch die Grösse*** $\varrho = A_x + B_y$ ***einen gemeinsamen Multiplicator aller*** $\bar{U}f$ ***liefert.***

Durch ganz analoge Behandlung der dritten und vierten Gleichung (6) erkennen wir, dass die Grösse

$$\sigma = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y$$

die Gleichung

$$\sigma(\xi_x + \eta_y) + \sigma_x \xi + \sigma_y \eta = 0$$

erfüllt und also ***wiederum einen gemeinsamen Multiplicator aller*** $\bar{U}f$ ***darstellt.***

Wir fassen die bisherigen Resultate in der folgenden Weise zusammen:

Satz 2: *Ist die Grösse C eine Constante, so stellt eine jede unter den drei Grössen*

$$\omega = CD + \mathfrak{A}B - A\mathfrak{B},$$

$$\varrho = A_x + B_y, \qquad \sigma = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y$$

einen gemeinsamen Multiplicator aller $\bar{U}f$ *dar.*

Indem wir jetzt weiter gehen, wollen wir zuerst ausdrücklich voraussetzen, dass die Constante C von Null verschieden ist; sodann erledigen wir den Fall $C = 0$, und schliesslich machen wir die Annahme, dass C keine Constante, sondern eine wirkliche Funktion von x und y darstellt.

C = Const. ≠ 0.

Ist C constant und von Null verschieden, so sind die Grössen ξ und η bestimmt durch die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \omega(\xi_x + \eta_y) + \omega_x \xi + \omega_y \eta &= 0 \\ \varrho(\xi_x + \eta_y) + \varrho_x \xi + \varrho_y \eta &= 0 \\ \sigma(\xi_x + \eta_y) + \sigma_x \xi + \sigma_y \eta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

die in den Grössen

$$\xi_x + \eta_y, \quad \xi, \quad \eta$$

linear und homogen sind. Ist daher die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega_x & \omega_y \\ \varrho & \varrho_x & \varrho_y \\ \sigma & \sigma_x & \sigma_y \end{vmatrix} \equiv \theta$$

nicht identisch Null, so sind ξ und η alle beide gleich Null, und dann zeigen die vier ersten Gleichungen (6), die jetzt die Form

$$\beta_y = 0, \quad \beta_x = 0, \quad \alpha_x = 0, \quad \alpha_y = 0$$

annehmen, dass α und β Constante sind und dass Uf daher die Form

$$\text{Const.}\, \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} + \text{Const.}\, \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

besitzt. In diesem Falle enthält die gesuchte Gruppe G keine anderen unabhängigen infinitesimalen Transformationen als

$$X_1 f = \mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}, \quad X_2 f = \mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Verschwindet dagegen die Determinante Θ identisch, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht sämtlich gleich Null sind, so reducieren sich die *drei* Gleichungen (10) auf zwei unabhängige, die alle beide die Form

$$M(\xi_x + \eta_y) + M_x \xi + M_y \eta = 0,$$

$$N(\xi_x + \eta_y) + N_x \xi + N_y \eta = 0$$

besitzen. Dann haben alle infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{U}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

zwei gemeinsame Multiplicatoren M und N. Dementsprechend ist das Verhältniss $M:N$ eine gemeinsame Lösung aller Gleichungen

$$0 = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \overline{U}f.$$

Es ist nun immer möglich statt x und y zwei solche neue Veränderliche

$$x_1 = \frac{M}{N}, \quad y_1 = Y(x, y)$$

einzuführen, dass

$$M = x, \quad N = 1$$

wird[24]). Die Symbole der infinitesimalen Transformation

$$\overline{U}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

erhalten hierbei die Form:

$$\overline{U}f = \mu(x)\frac{\partial f}{\partial y}$$

und die Transformation

$$Uf = \mu(x)\frac{\partial f}{\partial y} + z\,\alpha\,(x, y)\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\,\beta\,(x, y)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$-\,C\beta_y = \mu(x)\,A_y$$

$$C\beta_x = -\,A\mu'(x) + \mu(x)\,B_y$$

$$C\alpha_y = \mu(x)\,\mathfrak{A}_y$$

$$-\,C\alpha_x = -\,\mathfrak{A}\mu'(x) + \mu(x)\,\mathfrak{B}_y.$$

Die zugehörigen Integrabilitätsbedingungen

$$A_{xy} + B_{yy} = 0, \qquad \mathfrak{A}_{xy} + \mathfrak{B}_{yy} = 0$$

werden in allgemeinster Weise befriedigt, wenn wir

$$A_x + B_y = X'(x), \qquad \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y = X_1'(x)$$

und

$$A = X(x) + \Omega_y, \quad B = -\Omega_x, \quad \mathfrak{A} = X_1(x) + V_y, \quad \mathfrak{B} = -\,V_x$$

setzen. Die entsprechenden Werthe der Grössen α und β sind daher

$$\alpha = \frac{\mu(x)}{C}\,V_y + \frac{1}{C}\int X_1\,(x)\,d\mu, \qquad \beta = \div\,\frac{\mu\Omega_y}{C} - \frac{1}{C}\int X d\mu.$$

Führen wir hier neue Veränderliche ein, nämlich

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z\,e^{-\frac{V}{C}}, \qquad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}\,e^{\frac{\Omega}{C}},$$

so sehen wir, dass wir in den früheren Formeln ohne Beschränkung

$$V = 0, \qquad \Omega = 0$$

setzen können.

Hierbei enthält unsere Integralinvariante die Form

$$(11) \qquad \int\left(\frac{X(x)p}{z} + \frac{X_1(x)\,\mathfrak{p}}{\mathfrak{z}} + \frac{C(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}} + D\right) dx\,dy$$

während

$$(12) \qquad Uf = \mu(x)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{C}\left(\int X_1\, d\mu\right) z\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{C}\left(\int X d\mu\right) \mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

wird. Setzen wir $\mu = 1$, so erkennen wir noch, dass D eine Funktion von x allein sein muss[25]). Sind andererseits im Integrale (11) die Grössen X, X_1 und D beliebige Funktionen von x, die jedenfalls nicht mehr als eine homogene lineare Gleichung

$$kX' + k_1 X_1' + k_0 D = 0$$

mit konstanten Coefficienten erfüllen, so besitzt die Gruppe des Integrals (11) die Form (12)[26]).

Jetzt nehmen wir an, dass nicht allein die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega_x & \omega_y \\ \varrho & \varrho_x & \varrho_y \\ \sigma & \sigma_x & \sigma_y \end{vmatrix}$$

der Grössen $\omega = CD + \mathfrak{A}B - A\mathfrak{B}$, $\varrho = A_x + B_y$, $\sigma = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y$ sondern auch alle ihre zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden, während die drei Grössen ω, ϱ und σ nicht sämmtlich gleich Null sind.

In diesem Falle reduciren sich die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \omega(\xi_x + \eta_y) + \omega_x \xi + \omega_y \eta &= 0 \\ \varrho(\xi_x + \eta_y) + \varrho_x \xi + \varrho_y \eta &= 0 \\ \sigma(\xi_x + \eta_y) + \sigma_x \xi + \sigma_y \eta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

auf eine einzige Gleichung

$$N(\xi_x + \eta_y) + N_x \xi + N_y \eta = 0$$

und dabei können wir ohne Beschränkung annehmen (das heisst, wir können durch eine passende Variabeländerung erreichen) dass N gleich 1 wird[27]).

Die Definitionsgleichung

$$\xi_x + \eta_y = 0$$

zeigt, dass wir

$$\xi = W_y, \qquad \eta = - W_x$$

setzen können und dass die Funktion $W(x,y)$ ganz beliebig gewählt werden kann.

Die Gleichungen (10) erhalten jetzt die Form

$$\omega_x W_y - \omega_y W_x = 0, \qquad \varrho_x W_y - \varrho_y W_x = 0, \qquad \sigma_x W_y - \sigma_y W_x = 0$$

und sie sollen bestehen, *welche Funktion von x, y die Grösse W sein möge.* Also sind ω, ϱ und σ drei Constanten, die aber nicht sämmtlich gleich Null sein können[28]).

Es ist also

$$\omega = k_1, \qquad \varrho = k_2, \qquad \sigma = k_3 \qquad\qquad (k_i = \text{Const.})$$

oder

$$CD + \mathfrak{A}B - A\mathfrak{B} = k_1$$

$$A_x + B_y = k_2$$

$$\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y = k_3$$

woraus

$$A = k_2 x + \Omega_y, \qquad B = -\Omega_x, \qquad \mathfrak{A} = k_3 x + V_y, \qquad \mathfrak{B} = - V_x;$$

und es ergiebt sich genau wie im vorigen Falle, dass wir ohne Beschränkung $\Omega = V = 0$ setzen können, so dass unser Integral die Form:

$$(13) \qquad \int \left(\frac{k_2 x p}{z} + \frac{k_3 x \mathfrak{p}}{\mathfrak{z}} + \frac{C(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}} + k_4 \right) dx\, dy$$

annimmt, wobei k_4 eine Constante bezeichnet. Ist andererseits C von Null verschieden, und sind die drei Constanten k_2, k_3, k_4 nicht sämmtlich gleich Null, so entspricht das obenstehende Integral immer den hier gemachten Voraussetzungen.

Die zugehörigen infinitesimalen Transformationen Uf sind bestimmt durch die Gleichungen (6), die durch Substitution der Werthe

$$A = k_2 x, \qquad B = 0, \qquad \mathfrak{A} = k_3 x, \qquad \mathfrak{B} = 0, \qquad \xi = W_y, \qquad \eta = - W_x$$

die Form

$$-C\beta_y = -k_2 x\, W_{xy} + k_2\, W_y$$

$$C\beta_x = k_2 x\, W_{xx}$$

$$C\alpha_y = -k_3 x\, W_{xy} + k_3\, W_y$$

$$-C\alpha_x = k_3 x\, W_{xx}$$

annehmen. Es ist daher

$$C\beta = k_2 x\, W_x - k_2\, W + \text{Const.}$$

$$-C\alpha = k_3 x\, W_x - k_3\, W + \text{Const.}$$

und

$$Uf = W_y \frac{\partial f}{\partial x} - W_x \frac{\partial f}{\partial y} - (k_3 x\, W_x - k_3\, W + \text{Const.})\, \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

$$+ (k_2 x\, W_x - k_2\, W + \text{Const.})\, \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}. \qquad (14)$$

Es erübrigt noch, den Fall

$$\omega = 0, \qquad \varrho \equiv A_x + B_y = 0, \qquad \sigma \equiv \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y = 0$$

zu erledigen. In diesem Fall ist

$$A = \Omega_x, \qquad B = -\Omega_y, \qquad \mathfrak{A} = V_x, \qquad \mathfrak{B} = -V_y$$

und wir erkennen wie früher, dass wir Ω und V ohne Beschränkung gleich Null und dementsprechend

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad \mathfrak{A} = 0, \qquad \mathfrak{B} = 0$$

setzen können, und da $\omega = 0$ ist, so folgt, dass auch

$$D = 0$$

sein muss. Die kanonische Form unserer Integralinvariante wird also im vorliegenden Falle

$$\int \frac{p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q}{z\mathfrak{z}}\, dx\, dy.$$

[Wenn wir alle diese Resultate zusammenfassen, können wir folglich das Theorem aussprechen[29]):]

Theorem: *Bleibt das über zweidimensionale Mannigfaltigkeiten:* $z = Z(x, y)$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}(x, y)$ *erstreckte Integral*

$$\int \left(\alpha p + \beta q + \gamma \mathfrak{p} + \delta \mathfrak{q} + \varepsilon (p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q) + \varphi\right) dx\, dy$$

invariant bei den beiden infinitesimalen Transformationen

$$X_1 f = z \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad X_2 f = \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

und haben die Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots \varphi$ *in Folge dessen die Form*

$$\alpha = \frac{A(x,y)}{z}, \quad \beta = \frac{B(x,y)}{z}, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{A}(x,y)}{\mathfrak{z}}, \quad \delta = \frac{\mathfrak{B}(x,y)}{\mathfrak{z}}, \quad \varepsilon = \frac{C(x,y)}{\mathfrak{z} z}, \quad \varphi = D(x,y);$$

ist ferner

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \vartheta \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

die allgemeinste infinitesimale Transformation, die $X_1 f$, $X_2 f$ *und das obenstehende Integral invariant lässt, und ist endlich die Grösse* C *eine von Null verschiedene Constante, so sind* $\xi(x,y)$ *und* $\eta(x,y)$ *Funktionen von* x *und* y, *die durch die Gleichungen*

$$(CD + \mathfrak{A}B - A\mathfrak{B})(\xi_x + \eta_y) + (CD + \mathfrak{A}B - A\mathfrak{B})_x \,.\, \xi + (CD + \mathfrak{A}B - A\mathfrak{B})_y \,.\, \eta = 0$$

$$(A_x + B_y)(\xi_x + \eta_y) + (A_x + B_y)_x \,.\, \xi + (A_x + B_y)_y \,.\, \eta = 0$$

$$(\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y)(\xi_x + \eta_y) + (\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y)_x \,.\, \xi + (\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y)_y \,.\, \eta = 0$$

bestimmt werden. Die Incremente ζ *und* ϑ *besitzen die Form*

$$\xi = z \,.\, \alpha(x,y), \qquad \vartheta = \mathfrak{z} \,.\, \beta(x,y)$$

und dabei werden α *und* β *durch Quadratur der immer integrablen Gleichungen*

$$-C\beta_y = A\eta_y - B\xi_y + \xi A_x + \eta A_y,$$

$$C\beta_x = -A\eta_x + B\xi_x + \xi B_x + \eta B_y,$$

$$C\alpha_y = -\mathfrak{B}\xi_y + \mathfrak{A}\eta_y + \xi\mathfrak{A}_x + \eta\mathfrak{A}_y,$$

$$-C\alpha_x = \mathfrak{B}\xi_x - \mathfrak{A}\eta_x + \xi\mathfrak{B}_x + \eta\mathfrak{B}_y$$

gefunden. Hier können vier wesentlich verschiedene Fälle eintreten. Ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega_x & \omega_y \\ \varrho & \varrho_x & \varrho_y \\ \sigma & \sigma_x & \sigma_y \end{vmatrix} = \theta$$

von Null verschieden[29]*), so ist* $\xi = \eta = 0$, $\alpha = Const.$, $\beta = Const.$

$$Uf = Const.\, \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} + Const.\, \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Durch ein passende Variabel-Änderung kann man immer erreichen, dass $A = 0$, $\mathfrak{A} = 0$ *wird.*

Verschwindet die dreireihige Determinante θ, *während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht sämmtlich gleich Null sind, so kann die Integralinvariante auf die kanonische Form*

$$\int \left(\frac{X(x)\,p}{z} + \frac{X_1(x)\,\mathfrak{p}}{\mathfrak{z}} + \frac{p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q}{z\mathfrak{z}} + D(x) \right) dx\, dy$$

gebracht werden, während

$$Uf = \mu(x) \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\int X_1\, d\mu \right) z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\int X\, d\mu \right) \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

ist.

Verschwinden auch die zweireihigen Unterdeterminanten, während ω, ϱ *und* σ *nicht sämmtlich gleich Null sind,* [*so kann die Integralinvariante auf die kanonische Form*

$$\int \left(\frac{k_2\, xp}{z} + \frac{k_3\, x\mathfrak{p}}{\mathfrak{z}} + \frac{C(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}} + k_4 \right) dx\, dy$$

gebracht werden, wo k_2, k_3 *und* k_4 *Constanten bezeichnen, die nicht sämmtlich gleich Null sind, und die zugehörige infinitesimale Transformation* Uf *ist:*

$$Uf = W_y \frac{\partial f}{\partial x} - W_x \frac{\partial f}{\partial y} - (k_3\, x W_x - k_3 W + const.)\, z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$+ (k_2\, x W_x - k_2 W + const.)\, \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Wenn endlich alle drei Grössen ω, ϱ und σ gleich Null sind, so kann die Integralinvariante auf die kanonische Form

$$\int \frac{p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q}{z\mathfrak{z}}\, dx\, dy$$

gebracht werden und die zugehörige infinitesimale Transformation hat die Form

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha \frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

wo ξ, η, α und β ganz beliebige Funktionen von x und y sind[30]).]

C = 0.

Hiermit kennen wir alle Fälle, die eintreten können, wenn C eine von Null verschiedene Constante darstellt. Jetzt setzen wir voraus, dass $C = 0$ ist und finden dabei zweckmässig zwischen zwei Unterfällen zu unterscheiden je nachdem die Grösse

$$\omega = A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B$$

von Null verschieden oder gleich Null ist. Seien zunächst:

$$C = 0, \qquad A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B \neq 0$$

Ist $C = 0$, so erhalten die Gleichungen (6) die einfache Form

$$\left.\begin{aligned}
0 &= A\eta_y - B\xi_y + \xi A_x + \eta A_y, \\
0 &= -A\eta_x + B\xi_x + \xi B_x + \eta B_y \\
0 &= -\mathfrak{B}\xi_y + \mathfrak{A}\eta_y + \xi\mathfrak{A}_x + \eta\mathfrak{A}_y \\
0 &= \mathfrak{B}\xi_x - \mathfrak{A}\eta_x + \xi\mathfrak{B}_x + \eta\mathfrak{B}_y \\
0 &= D(\xi_x + \eta_y) + \xi D_x + \eta D_y + A\alpha_x + B\alpha_y + \mathfrak{A}\beta_x + \mathfrak{B}\beta_y
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Da wir nun überdies angenommen haben, dass die Grösse $A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B$ von Null verschieden ist, so können wir die erste und dritte Gleichung

nach ξ_y und η_y auflösen, und ebenfalls aus der zweiten und vierten Gleichung die Grössen η_x und ξ_x bestimmen. Die Form dieser Auflösungen:

$$0 = (A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B)\,\eta_y + (\mathfrak{B}A_x - B\mathfrak{A}_x)\,\xi + (\mathfrak{B}A_y - B\mathfrak{A}_y)\,\eta,$$

$$0 = (A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B)\,\xi_y + (\mathfrak{A}A_x - A\mathfrak{A}_x)\,\xi + (\mathfrak{A}A_y - A\mathfrak{A}_y)\,\eta,$$

$$0 = (A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B)\,\eta_x + (B\mathfrak{B}_x - \mathfrak{B}B_x)\,\xi + (B\mathfrak{B}_y - \mathfrak{B}B_y)\,\eta,$$

$$0 = (A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B)\,\xi_x + (A\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}B_x)\,\xi + (A\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}B_y)\,\eta$$

zeigt, dass die durch Integration dieser Gleichungen hervorgehenden Ausdrücke für ξ und η höchstens zwei willkürliche Constante enthalten[31]. Die verkürzten infinitesimalen Transformationen

$$\bar{U}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

bilden daher immer eine *endliche* Gruppe, die höchstens zwei Parameter enthält.

Indem wir genau wie im vorigen Falle[32] verfahren, erhalten wir die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \omega\,(\xi_x + \eta_y) + \omega_x\,\xi + \omega_y\,\eta &= 0 \\ \varrho\,(\xi_x + \eta_y) + \varrho_x\,\xi + \varrho_y\,\eta &= 0 \\ \sigma\,(\xi_x + \eta_y) + \sigma_x\,\xi + \sigma_y\,\eta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

in denen ω, ϱ und σ die Werthe

$$\omega = A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B$$

$$\varrho = A_x + B_y, \qquad \sigma = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y$$

haben. Dabei erinneren wir uns, dass wir ausdrücklich vorausgesetzt haben, dass die Grösse ω von Null verschieden ist.

Es ist immer möglich, (vgl. S. 25) statt x und y solche Grössen

$$x_1 = X(x, y), \qquad y_1 = Y(x, y)$$

als unabhängige Veränderliche einzuführen, dass die erste Gleichung (16) die Form

$$\xi_x + \eta_y = 0$$

annimmt, und dass ω den Werth

$$\omega \equiv A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B = 1$$

erhält[33]. Alsdann haben alle verkürzten infinitesimalen Transformationen $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$ die Form:

$$V_y \frac{\partial f}{\partial x} - V_x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Wir wollen zunächst annehmen, dass die Gruppe dieser verkürzten infinitesimalen Transformationen zwei Parameter enthält. Alsdann können wir immer die beiden betreffenden infinitesimalen Transformationen auf die Form

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad V_y \frac{\partial f}{\partial x} - V_x \frac{\partial f}{\partial y}$$

bringen[34]. Dabei können, wie wir wissen, zwei wesentlich verschiedenen Fälle eintreten[35]. Ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \quad V_y \frac{\partial f}{\partial x} - V_x \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

oder

$$V_{yy} \frac{\partial f}{\partial x} - V_{xy} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

und

$$V_{yy} = 0, \qquad V_{xy} = -1$$

so kommt

$$V_y = -x, \qquad V = -xy + X_1(x)$$

oder

$$V_y \frac{\partial f}{\partial x} - V_x \frac{\partial f}{\partial y} = -x \frac{\partial f}{\partial x} + (y - X'_1) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Wir können überdies ohne Beschränkung $X_1' = 0$ setzen[36], so dass unsere beiden verkürzten infinitesimalen Transformationen die Form

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y}$$

annehmen.

Um nun die Form der Coefficienten A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zu finden, setzen wir in den Gleichungen (15) zunächst $\xi = 0$, $\eta = 1$ und erkennen so, dass jene vier Coefficienten sämmtlich von y frei sind. Sodann ertheilen wir in den Gleichungen (15) den Grössen ξ und η die Werthe

$$\xi = x, \qquad \eta = -y$$

und erhalten so die Differentialgleichungen

$$0 = -A + x\frac{\partial A}{\partial x}, \qquad 0 = -\mathfrak{A} + x\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x},$$

$$0 = B + x\frac{\partial B}{\partial x}, \qquad 0 = \mathfrak{B} + x\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x},$$

die uns zeigen, dass unsere Coefficienten die Form

$$A = mx, \qquad \mathfrak{A} = \mu x, \qquad B = \frac{n}{x}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{\nu}{x}$$

besitzen. Und dabei ist die Constante

$$A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B \equiv m\nu - \mu n = 1.$$

Unsere Integralinvariante hat bei dieser Wahl der unabhängigen Veränderlichen die Form

$$\int \left(\frac{mxp + \frac{n}{x}q}{z} + \frac{\mu x\mathfrak{p} + \frac{\nu}{x}\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}} + D \right) dx\, dy$$

wo wir (vgl. S. 22)

$$m\nu - \mu n = 1 \quad \text{und } D = 0$$

setzen können.

Die zugehörigen infinitesimalen Transformationen Uf haben die Form:

$$Uf = \text{Const.}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \text{Const.}\frac{\partial f}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial f}{\partial z} + \beta\mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} \qquad (17)$$

wo α und β durch die Bedingungsgleichung:

$$\xi D_x + \eta D_y + mx\alpha_x + \frac{n}{x}\alpha_y + \mu x\beta_x + \frac{\nu}{x}\beta_y = 0$$

gebunden sind[37].

Hiermit ist die Annahme, dass die beiden verkürzten infinitesimalen Transformationen

$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ und } V_y \frac{\partial f}{\partial x} - V_x \frac{\partial f}{\partial y}$$

nicht vertauschbar sind, erledigt.

Wir wollen daher jetzt voraussetzen, dass die beiden Transformationen vertauschbar sind, und dass dementsprechend

$$V_{yy} \frac{\partial f}{\partial x} - V_{xy} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

oder

$$V_{yy} = 0, \qquad V_{xy} = 0$$

und

$$V = ky + X_1(x)$$

ist. Als dann wird

$$V_y \frac{\partial f}{\partial x} - V_x \frac{\partial f}{\partial y} = k \frac{\partial f}{\partial x} - X_1' \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Hier können wiederum zwei wesentlich verschiedene Unterfälle eintreten, jenachdem k gleich Null oder von Null verschieden ist.

Ist die Constante k von Null verschieden, so können wir

$$k = 1, \qquad X_1' = 0$$

setzen, sodass unsere verkürzten infinitesimalen Transformationen die Form

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

erhalten[38]). Um jetzt die entsprechende Form der Integralinvariante zu finden, benutzen wir wiederum die Gleichungen (15) in denen wir zunächst

$$\xi = 0, \qquad \eta = 1$$

und sodann

$$\xi = 1, \qquad \eta = 0$$

setzen können. Dabei ergiebt sich, dass die vier Coefficienten, A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sämmtlich von x und y frei sind.

Unsere Integralinvariante erhält somit die Form

$$\int \left(\frac{mp + nq}{z} + \frac{\mu\mathfrak{p} + \nu\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}} + D \right) dx\, dy$$

und dabei sind m, n, μ und ν Constanten, während D eine Funktion von x und y darstellt, die gleich Null gesetzt werden kann, indem die Constanten m, n, μ, ν, die ja die Bedingung

$$m\nu - \mu n = 1$$

erfüllen, nicht sämmtlich verschwinden dürfen[39]).

Ist die früher besprochene Constante k gleich Null, so können die beiden verkürzten infinitesimalen Transformationen die Form

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}$$

erhalten[40]). In den Gleichungen (15) müssen wir also zuerst:

$$\xi = 0, \quad \eta = 1$$

und sodann

$$\xi = 0, \quad \eta = x$$

setzen. Dabei ergiebt sich, dass

$$A = 0, \quad \mathfrak{A} = 0$$

sind. Da wir aber ausdrücklich vorausgesetzt haben, dass die Grösse $A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B$ von Null verschieden sein soll, so sehen wir, das unsere letzte Hypothese zu Wiederspruch führt.

Nachdem hiermit alle Fälle erledigt sind, bei denen die infinitesimalen Transformationen

$$\overline{U}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

eine zweigliedrige Gruppe erzeugen, wollen wir annehmen dass nur eine $\overline{U}f$ vorhanden ist, die dann ohne Beschränkung auf die Form

$$\overline{U}f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

gebracht werden kann. Setzen wir aber in den Gleichungen (15):

$$\xi = 0, \qquad \eta = 1$$

so erkennen wir, dass die vier Coefficienten, A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von y frei sind. Die zugehörige Integralinvariante hat somit die Form:

$$\int \left(\frac{A(x)p + B(x)q}{z} + \frac{\mathfrak{A}(x)\mathfrak{p} + \mathfrak{B}(x)\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}} + D \right) dx\, dy$$

und dabei können wir durch Einführung zweckmässiger neuer Veränderlichen

$$x_1 = \varphi(x), \qquad y_1 = \frac{1}{\varphi(x)} y + \psi(x)$$

erreichen, dass B und $\mathfrak{A}$ gleich Null werden[41]; wir können überdies auch $D = 0$ setzen. Unser Integral erhält also die einfache Form

$$\int \left(\frac{A(x)p}{z} + \frac{\mathfrak{B}(x)\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}} \right) dx\, dy.$$

Hiermit[42] ist unsere Discussion der Hypothese $C = 0$, $A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B \neq 0$ zum Abschluss gebracht. Wir können daher jetzt die nächste Hypothese

$$\boldsymbol{C = 0, \qquad A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B = 0}$$

im Angriff nehmen.

Bei passender Wahl der unabhängigen Veränderlichen können wir erreichen, dass $A = 0$ wird und dass in Folge dessen auch $\mathfrak{A}B$ verschwindet[43]. Es ist daher auch die eine unter den beiden Grössen $\mathfrak{A}$ und B gleich Null. Setzen wir zunächst:

$$C = 0, \qquad A = 0, \qquad \mathfrak{A} = 0$$

so wird

$$B\,\xi_y = 0, \qquad \mathfrak{B}\,\xi_y = 0$$

$$B\,\xi_x + \xi\,B_x + \eta\,B_y = 0$$

$$\mathfrak{B}\,\xi_x + \xi\,\mathfrak{B}_x + \eta\,\mathfrak{B}_y = 0$$

$$D(\xi_x + \eta_y) + \xi\,D_x + \eta\,D_y + B\,\alpha_y + \mathfrak{B}\,\beta_y = 0.$$

Hier ist es nun zunächst denkbar, dass

$$B = 0, \qquad \mathfrak{B} = 0$$

sind. In diesem Falle sind ξ, η und D nur durch eine einzige Bedingungsgleichung, nähmlich

$$D(\xi_x + \eta_y) + \xi D_x + \eta D_y = 0$$

gebunden. Dabei können wir durch passende Wahl der Veränderlichen erreichen, dass $D = 1$ wird[44]). Hierbei erhält unsere Integralinvariante die kanonische Form

$$\int dx\, dy,$$

während die Gruppe der $\overline{U}f$ die bekannte Form

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

annimmt. Die Grössen α und β sind dabei ganz beliebige Funktionen von x und y.

Es ist ferner denkbar, dass die beiden Grössen B und $\mathfrak{B}$ sich nur um einen constanten Faktor unterscheiden, dass also

$$\mathfrak{B} = kB, \qquad B \neq 0.$$

Alsdann erfüllen ξ und η zwei und nur zwei Bedingungsgleichungen, nämlich:

$$\xi_y = 0, \qquad B\xi_x + B_x\xi + B_y\eta = 0.$$

Ist dabei B_y verschieden von Null, so sehen wir, dass ξ eine wilkürliche Funktion von x sein kann und dass η vollständig bestimmt ist, wenn für ξ eine bestimmte Funktion von x genommen wird[45]).

Ist andererseits $B_y = 0$, so wird

$$\xi_y = 0 \qquad B\xi_x + B_x\xi = 0$$

$$D(\xi_x + \eta_y) + \xi D_x + \eta D_y + B\alpha_y + kB\beta_y = 0$$

und

$$B = B(x), \qquad \xi = \frac{m}{B(x)}.$$

In diesem Fall ist also die Form des Incrementes ξ vollständig bestimmt. Es ist ferner möglich solche neue Veranderliche

$$x_1 = \varphi(x), \qquad y_1 = \psi(x, y), \qquad z_1 = z\Omega(x, y), \qquad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}\, V(x, y)$$

einzuführen, dass

$$B(x) = 1, \qquad D(x, y) = 0$$

wird[46]). Unsere Integralinvariante erhält hierbei die Form

$$\int \left(\frac{q}{z} + \frac{k\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}}\right) dx\, dy$$

und die zugehörigen infinitesimalen Transformationen Uf sind bestimmt[47]) durch die Gleichungen

$$\xi_y = 0, \qquad \xi_x = 0, \qquad \alpha_y + k\beta_y = 0$$

die uns zeigen, dass ξ gleich 1 gesetzt werden kann, während η eine willkürliche Funktion von x und y darstellt und die Incremente α, β durch die Gleichung

$$\alpha + k\beta + \psi(x) = 0$$

mit der willkürlichen Funktion $\psi(x)$ gebunden sind.

Es ist endlich denkbar, dass sowohl B wie $\mathfrak{B}$ von Null verschieden sind, und dass dabei ihr Verhältniss eine Funktion von x, y darstellt. Alsdann erfüllen die Incremente der gesuchten infinitesimalen Transformationen Uf[47]) *vier* Bedingungsgleichungen

$$\xi_y = 0, \qquad D(\xi_x + \eta_y) + \xi D_x + \eta D_y + B\alpha_y + \mathfrak{B}\beta_y = 0$$

$$B\xi_x + \xi B_x + \eta B_y = 0, \qquad \mathfrak{B}\xi_x + \xi\mathfrak{B}_x + \eta\mathfrak{B}_y = 0$$

aus denen durch Elimination die Gleichung

$$\left(\frac{B}{\mathfrak{B}}\right)_x \xi + \left(\frac{B}{\mathfrak{B}}\right)_y \eta = 0$$

hervorgeht. Im vorliegenden Fall ist somit das Verhältniss $B:\mathfrak{B}$ eine Invariante der verkürzten infinitesimalen Transformationen $\bar{U}f$. Wir finden

$$(B\mathfrak{B}_y - \mathfrak{B} B_y)\xi_x + \xi(B_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{B}_x B_y) = 0.$$

Ist daher

$$B\mathfrak{B}_y - \mathfrak{B} B_y \neq 0$$

so hat ξ eine ganz bestimmte Form, und da B_y und $\mathfrak{B}_y$ nicht alle beide verschwinden, so ist auch die Form von η vollständig bestimmt[48]). Unter den gemachten Voraussetzungen giebt es also nur eine infinitesimale Transformation $\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ist dagegen

$$B\mathfrak{B}_y - \mathfrak{B} B_y = 0, \qquad B \neq 0, \qquad \mathfrak{B} \neq 0$$

und dementsprechend

$$\mathfrak{B} = B\,.\,\varphi(x)$$

und

$$\xi(B_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{B}_x B_y) = 0,$$

so kann

$$B_y \neq 0 \text{ und also auch } \mathfrak{B}_y \neq 0$$

sein, in Folge dessen

$$B_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{B}_x B_y \neq 0$$

und

$$\xi = 0, \qquad \eta B_y = 0, \qquad \eta = 0.$$

In diesem Falle[49]) giebt es also gar keine infinitesimale Transformation $\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$.

Unter den gemachten Voraussetzungen

$$B\mathfrak{B}_y - \mathfrak{B} B_y = 0, \qquad \mathfrak{B} = B\,.\,\varphi(x) \neq 0$$

können wir aber auch

$$B_y = 0, \qquad \mathfrak{B}_y = 0$$

und dementspreehend

$$B_x \mathfrak{B}_y - B_y \mathfrak{B}_x = 0$$

setzen. Alsdann wird

$$B \xi_x + \xi B_x = 0, \qquad \mathfrak{B} \xi_x + \xi \mathfrak{B}_x = 0$$

und da das Verhältniss $\mathfrak{B} : B$ keine Constante sein darf, folgt

$$\xi = 0$$

während η vollständig unbestimmt bleibt[50]).

Wir wenden uns sodann zu der Hypothese

$$C = 0, \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad \mathfrak{A} \neq 0.$$

Alsdann kriegen wir zur Bestimmung der infinitesimalen Transformation Uf die Gleichungen

$$0 = -\mathfrak{B} \xi_y + \mathfrak{A} \eta_y + \xi \mathfrak{A}_x + \eta \mathfrak{A}_y$$

$$0 = \mathfrak{B} \xi_x - \mathfrak{A} \eta_x + \xi \mathfrak{B}_x + \eta \mathfrak{B}_y$$

$$0 = D(\xi_x + \eta_y) + \xi D_x + \eta D_y + \mathfrak{A} \beta_x + \mathfrak{B} \beta_y$$

aus denen wie bekannt die Integrabilitätsbedingung

$$(\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y)(\xi_x + \eta_y) + (\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y)_x \xi + (\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y)_y \cdot \eta = 0$$

hervorgeht.

Ist hier

$$\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y = 0$$

und dementsprechend

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad \mathfrak{B} = -\frac{\partial W}{\partial x}$$

so sind ξ und η durch die beiden Gleichungen

$$0 = W_x \xi_y + W_y \eta_y + \xi W_{xy} + \eta W_{yy}$$

$$0 = W_x \xi_x + W_y \eta_x + \xi W_{xx} + \eta W_{xy}$$

bestimmt und aus ihnen folgt durch Integration:

$$W_x \xi + W_y \eta = \text{Const.} = k.$$

In dem vorliegenden Falle kann daher eines unter den beiden Incrementen ξ und η eine ganz beliebige Funktion von x, y sein[51]).

Ist dagegen die Grösse

$$\varrho = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y$$

von Null verschieden, so zeigt die Gleichung

$$\varrho\,(\xi_x + \eta_y) + \varrho_x \xi + \varrho_y \eta = 0$$

dass die infinitesimalen Transformationen $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$ den gemeinsamen Multiplicator ϱ haben.

Führen wir jetzt neue Veränderliche

$$x_1 = X(x, y), \qquad y_1 = Y(x, y), \qquad z_1 = z\,\Omega(x, y), \qquad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}\,V(x, y)$$

ein, so sind die neuen Coefficienten $\mathfrak{A}_1$, B_1, $\mathfrak{A}_1$, C_1 und D_1 (vgl. Seite 22) durch die Formeln:

$$\varDelta A_1 = A X_x + B X_y$$

$$\varDelta B_1 = A Y_x + B Y_y$$

$$\varDelta \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} X_x + \mathfrak{B} X_y$$

$$\varDelta \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A} Y_x + \mathfrak{B} Y_y$$

$$C_1 = C = 0$$

$$\varDelta D_1 = -A \frac{\Omega_x}{\Omega} - B \frac{\Omega_1}{\Omega} - \mathfrak{A} \frac{V_x}{V} - \mathfrak{B} \frac{V_y}{V} + D$$

bestimmt. Bei dieser Variabel-Aenderung bleibt daher die Form

$$\int \left(\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}}{z\mathfrak{z}} + D \right) dx\, dy$$

unserer Integralinvariante ungeändert, während allerdings die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und D im Allgemeinen ihre Form ändern. Bei passender Wahl von Ω und V erreichen wir, dass D_1 gleich Null wird; und da die Funk-

tionen $X(x, y)$, $Y(x, y)$ gar keiner Beschränkung unterworfen sind, können wir immer erreichen, dass[52])

$$\varrho = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y = 1$$

wird. Die infinitesimale Transformation $\overline{U}f$ erhält in folge dessen die Form:

$$\overline{U}f = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Wir können ferner

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \mathfrak{B} = y - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

setzen. Durch eine neue Aenderung der Veränderlichen

$$x_2 = X_1(x, y), \qquad y_2 = Y_1(x, y), \qquad z_2 = z\,\Omega, \qquad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}\,V$$

die so gewählt ist, dass

$$0 = \mathfrak{A}\frac{\partial X_1}{\partial x} + \mathfrak{B}\frac{\partial X_1}{\partial y}, \qquad 0 = \mathfrak{A}\frac{V_x}{V} + \mathfrak{B}\frac{V_y}{V}$$

$$1 = \frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial Y_1}{\partial y} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y_1}{\partial x}$$

wird, erkennen wir ohne Schwierigkeit[53]), dass wir $\psi = 0$ und

$$\mathfrak{A} = 0, \qquad \mathfrak{B} = y, \qquad D = 0$$

ferner

$$\overline{U}f = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

setzen können und dass

$$\int \frac{y\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}}\, dx\, dy$$

die entsprechende kanonische Form unserer Integralinvariante ist.

Nachdem hiermit alle Fälle bestimmt sind, die eintreten können, wenn die Grösse C von x und y unabhängig ist, müssen wir jetzt die Annahme machen. dass C keine Constante ist:

C ist keine Constante.

In diesem Falle ist, wie wir wissen, C eine Invariante aller

$$\bar{U}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Die Transformationsformeln auf Seite 20 zeigen, dass wir in diesem Falle

$$C = x, \qquad \xi = 0$$

setzen können[54]).

Die Definitionsgleichungen der gesuchten infinitesimalen Transformationen Uf erhalten in Folge dessen die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} -x\beta_y &= A\eta_y + \eta A_y \\ x\beta_x &= -A\eta_x + \eta B_y \\ x\alpha_y &= \mathfrak{A}\eta_y + \eta \mathfrak{A}_y \\ -x\alpha_x &= -\mathfrak{A}\eta_x + \eta \mathfrak{B}_y \\ 0 &= D\eta_y + \eta D_y + A\alpha_x + B\alpha_y + \mathfrak{A}\beta_x + \mathfrak{B}\beta_y. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Die Integrabilitätsbedingungen der vier ersten Gleichungen liefern die Relationen

$$\frac{\partial}{\partial y}\eta\left\{xA_x + xB_y - A\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\eta\left\{x\mathfrak{A}_x + x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}\right\} = 0.$$

Eliminiren wir ferner die Ableitungen α_x, α_y, β_x, β_y aus den fünf Definitionsgleichungen, so finden wir die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}\eta\,(xD + B\mathfrak{A} - \mathfrak{B}A) = 0.$$

Die drei neuen Gleichungen sind unmittelbar integrabel; sie zeigen dass

$$(19)\qquad \begin{cases} \eta\,(x A_x + x B_y - A) = X(x) \\ \eta\,(x\,\mathfrak{A}_x + x\,\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}) = X_1(x) \\ \eta\,(xD + B\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\mathfrak{A}) = X_2(x)\,. \end{cases}$$

Hier sind nun verschiedene Fälle denkbar, die durch das Verhalten der drei links stehenden Parenthesen charakterisirt werden.

Verschwinden die drei links stehenden Parenthesen; ist also

$$(20)\qquad \begin{cases} x\,(A_x + B_y) - A = 0 \\ x\,(\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y) - \mathfrak{A} = 0 \\ xD + B\mathfrak{A} - \mathfrak{B}A = 0 \end{cases}$$

so ist η gar keiner Beschränkung unterworfen und die gesuchte infinitesimale Transformation $\overline{U}f$ hat daher die allgemeine Form

$$\overline{U}f = \eta\,(x, y)\,\frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

Die beiden ersten Gleichungen, die auf die Form

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{A}}{x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{B}}{x}\right) = 0$$

gebracht werden können, zeigen dass die vier Grössen A, B, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die allgemeine Form

$$A = x\,\frac{\partial U}{\partial y}\,, \qquad B = -\,x\,\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\mathfrak{A} = x\,\frac{\partial V}{\partial y}\,, \qquad \mathfrak{B} = -\,x\,\frac{\partial V}{\partial x}$$

besitzen. Und wenn diese Werthe in die letzte Gleichung (20) eingetragen werden, so ergiebt sich, da U und V durch die Relation

$$xD - x^2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + x^2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

verknüpft sind[55]), dass der Coefficient D die Form

$$D = x(U_x V_y - U_y V_x)$$

besitzt.

Die zugehörige Integralinvariante hat somit die Gestalt

$$\int \left(\frac{x(U_y p - U_x q)}{z} + \frac{x(V_y \mathfrak{p} - V_x \mathfrak{q})}{\mathfrak{z}} + \frac{x(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}} + x(U_x V_y - U_y V_x) \right) dx\, dy$$

und erhält daher in den neuen Veränderlichen

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z\, e^{-V}, \qquad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}\, e^{U}$$

die einfache Form

$$\int \frac{x(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}}\, dx\, dy\,.$$

Bei dieser Variabeländerung behält $\overline{U}f$ ihre Form. Die Formeln (18) zeigen überdies, dass α und β constant sind, und also ist:

$$Uf = \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} + \text{Const.}\, z \frac{\partial f}{\partial z} + \text{Const.}\, \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

die zugehörige Form der infinitesimalen Transformation Uf.

Hiermit ist die Annahme, dass die drei Ausdrücke:

$$\left(\frac{A}{x}\right)_x + \left(\frac{B}{x}\right)_y, \qquad \left(\frac{\mathfrak{A}}{x}\right)_x + \left(\frac{\mathfrak{B}}{x}\right)_y$$

$$xD + B\mathfrak{A} - \mathfrak{B}A$$

sämmtlich verschwinden, erledigt.

Sind diese drei Ausdrücke nicht sämmtlich gleich Null, so besteht zwischen je zwei unter diesen Grössen eine lineare homogene Relation, deren Coefficienten Funktionen von x allein sind.

Es ist nun (Vergleiche die Transformationsformeln auf Seite 20) immer möglich, eben weil C von Null verschieden ist, solche neue Veränderliche

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = z\Omega, \qquad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} V$$

einzuführen, dass

$$A_1 = 0 \text{ und } \mathfrak{A}_1 = 0$$

wird. Wir können daher von vorneherein

$$C = x, \qquad A = 0, \qquad \mathfrak{A} = 0$$

setzen; und dabei bestehen zwischen je zwei unter den Grössen

$$B_y, \qquad \mathfrak{B}_y, \qquad D$$

lineare und homogene Relationen, deren Coefficienten Funktionen von x sind.

Wir wollen zunächst annehmen, dass B_y und $\mathfrak{B}_y$ nicht beide gleich Null sind, dass z. B. die Grösse B_y von Null verschieden ist. Alsdann führen wir die neuen Veränderlichen

$$x_2 = x, \qquad y_2 = B(x, y), \qquad z_2 = z, \qquad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}$$

ein und finden sodann durch Benutzung der Transformationsformeln auf Seite 20 dass:

$$B_y A_2 = 0 \qquad B_y B_2 = B B_y$$

$$B_y \mathfrak{A}_2 = 0 \qquad B_y \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B} B_y$$

und also

$$A_2 = 0, \qquad B_2 = y_2, \qquad \mathfrak{A}_2 = 0, \qquad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B} = \varphi(x) y_2 + \psi(x).$$

Wir können daher von vorneherein

$$A = 0, \qquad B = y, \qquad \mathfrak{A} = 0, \qquad \mathfrak{B} = \varphi(x) y + \psi(x)$$

und

$$\xi = 0, \qquad \eta = \mu(x)$$

setzen. Dabei zeigt die Formel

$$\eta D = \varphi_2(x)$$

dass auch D eine Funktion von x sein muss.

Hiermit erhält unsere Integralinvariante die kanonische Form

$$\int \left(\frac{yq}{z} + \frac{\varphi(x)\, y + \psi(x)}{\mathfrak{z}}\, \mathfrak{q} + \frac{x\,(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}} + D(x) \right) dx\, dy$$

und die zugehörigen infinitesimalen Transformationen Uf besitzen die allgemeine Form:

$$Uf = \mu(x) \frac{\partial f}{\partial y} - \left(\int \frac{\mu(x)\, \varphi(x)\, dx}{x} \right) z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\int \frac{\mu(x)\, dx}{x} \right) \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Endlich müssen wir annehmen, dass

$$B_y = 0, \qquad \mathfrak{B}_y = 0, \qquad xD \neq 0$$

und (19):

$$\eta\, D = \varphi(x).$$

Hier führen wir neue Veränderlichen ein, nämlich

$$x_1 = x, \qquad y_1 = \int D(x, y)\, dy, \qquad z_1 = z, \qquad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}$$

und erkennen durch Benutzung der Transformationsformeln auf Seite 20 dass die Coefficienten A_1, B_1, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, C_1, D_1 durch die folgenden Gleichungen bestimmt sind

$$C_1 = C = x, \qquad A_1 = 0 \qquad \mathfrak{A}_1 = 0$$

$$D \, . \, B_1 = B \, . \, D, \qquad D \, . \, \mathfrak{B}_1 = D \, . \, \mathfrak{B}$$

$$D \, . \, D_1 = D.$$

Wir können daher von vorneherein

$$C = x, \qquad A = 0, \qquad \mathfrak{A} = 0$$

$$B = X(x), \qquad \mathfrak{B} = X_1(x), \qquad D = 1$$

setzen; alsdann wird

$$\xi = 0, \qquad \eta = \mu(x), \qquad \alpha = \text{Const.} \qquad \beta = \text{Const.}$$

Die kanonische Form unserer Integralinvariante wird also

$$\int\left(\frac{X(x)\,q}{z}+\frac{X_1(x)\,\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}}+\frac{x\,(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)}{z\mathfrak{z}}+1\right)dy\,dx$$

und die zugehörigen infinitesimalen Transformationen haben die Gestalt

$$Uf=\mu(x)\frac{\partial f}{\partial y}+\text{Const.}\,z\frac{\partial f}{\partial z}+\text{Const.}\,\mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Wir gehen jetzt der Reihe nach alle neunzehn Fälle durch und zeigen, wie im jeden einzelnen Fall das betreffende Integrationsproblem erledigt werden kann.

Im nächsten Kapitel[1]) zeigen wir sodann, dass die von uns gegebenen Integrations-Methoden das Grösstmögliche leisten.

In einem und nur in einem unter den neunzehn vorhandenen Fällen kann kein Vortheil aus der bekannten Integralinvariante gezogen werden. In den achtzehn übrigen Fällen gestattet das Vorhandensein der bekannten Integralinvariante immer das Integrationsgeschäft wesentlich zu vereinfachen.

Fall I. [Seite 24].

Im ersten Falle, dass heisst, wenn C eine von Null verschiedene Constante ist und die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega_x & \omega_y \\ \varrho & \varrho_x & \varrho_y \\ \sigma & \sigma_x & \sigma_y \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, besteht die Gruppe Uf nur aus den beiden infinitesimalen Transformationen

$$X_1 f = z\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{und} \quad X_2 f = \mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Wir finden daher beide Lösungen des vollständigen Systems

$$X_1 f = 0, \qquad X_2 f = 0$$

ohne Integration, ja sogar ohne Quadratur[2]).

Fall II. [Seite 25].

Der zweite Fall ist dadurch charakterisirt, dass C gleich einer nicht verschwindenden Constante ist, und dass die dreireihige Determinante θ, nicht aber ihre sämmtlichen zweireihigen Unterdeterminanten gleich Null sind. In diesem Falle hat die verkürzte Gruppe $\bar{U}f$ die Form[56])

$$\bar{U}f = \mu(x) \frac{\partial f}{\partial y}$$

und ist somit ***intransitiv***. Wir finden daher die Invariante x ohne Integration, ja ohne Quadratur. Setzt man sodann diese Invariante gleich einer willkürlichen Constante c, so zerlegt die hervorgehende Gleichung

$$x = c = \text{const.}$$

den vierdimensionalen Raum x_1, x_2, x_3, x_4 in ∞^1 dreidimensionale Räume, deren jeder ∞^1 charakteristische Mannigfaltigkeiten des vollständigen Systems: $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ enthält.

Es bleibt jetzt nur noch übrig in jedem Raume $x = c$ die ∞^1 charakteristischen Mannigfaltigkeiten dieses Raumes zu finden. Zu diesem Zwecke beobachten wir, dass jede infinitesimale Transformation

$$Uf = \mu(x) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{C}\left(\int X_1\, d\mu\right) z \frac{\partial f}{\partial z} + - \frac{1}{C}\left(\int X\, d\mu\right) \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

die ∞^1 charakteristischen Mannigfaltigkeiten eines solches Raumes $x = c$ unter einander vertauscht. Und zwar sehen wir, dass alle Uf die ∞^1 charakteristischen Mannigfaltigkeiten eines Raumes $x = c$ in genau derselben Weise transformiren, dabei vorausgesetzt, dass wir diese ∞^1 Mannigfaltigkeiten als ein eindimensionales Gebiet auffassen. Hieraus folgt dass wir durch eine Quadratur einen Integrabilitätsfaktor desjenigen vollständigens Systems aufstellen können, das die ∞^1 gesuchten charakteristischen Mannigfaltigkeiten definirt. Eine zweite Quadratur liefert diese Mannigfaltigkeiten selbst[57]).

Im vorliegenden Falle verlangt daher die Integration des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ nur Differentiations- und Eliminationsoperationen und sodann zwei successive Quadraturen. Wir bezeichnen diese Operationen mit

(0), 0, 0.

Fall III. [Seite 27].

Der dritte Fall ist dadurch charakterisirt, dass der Coefficient C constant und von Null verschieden ist während die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega_x & \omega_y \\ \varrho & \varrho_x & \varrho_y \\ \sigma & \sigma_x & \sigma_y \end{vmatrix}$$

sowie alle ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht aber die Grössen ω, ϱ, σ sämmtlich gleich Null sind.

Jetzt hat Uf die Form

$$Uf = W_y \frac{\partial f}{\partial x} - W_x \frac{\partial f}{\partial y} - (k_3\, x W_x - k_3 W + \text{Const.})\, z \frac{\partial f}{\partial z} + (k_2\, x W_x - k_2 W + \text{Const.})\, \mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Das zweidimensionale Gebiet x, y der ∞^2 gesuchten charakteristischen Mannigfaltigkeiten des vollständigen Systems wird daher durch eine Gruppe transformirt die mit der Gruppe der Hydrodynamik[58]) ähnlich ist. Jetzt gestattet daher die Auffindung einer ersten Lösung des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ gar keine Vereinfachung, verlangt also eine Operation 2. Nachdem aber eine solche Lösung gefunden ist, die wir somit mit x bezeichnen können, leuchtet ein, dass die allgemeinste Transformation Uf, die x invariant lässt, die Form

$$\mu(x) \frac{\partial f}{\partial y} + (\ ) \frac{\partial f}{\partial z} + (\ ) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

besitzt. Wie im vorigen Falle genügen jetzt zwei successive Quadraturen zur Bestimmung der gesuchten charakteristischen Mannigfaltigkeiten des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$.

Im dritten Falle verlangt also die Integration des vorgelegten vollständigen Systems die Operationen

2, 0, 0.

Fall IV. [Seite 29].

Der vierte Fall ist dadurch charakterisirt, dass der Coefficient C constant und von Null verschieden ist, während die drei Grössen ω, ϱ und σ sämmtlich gleich Null sind. Die infinitesimalen Transformationen Uf haben die allgemeine Form:

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

und dabei sind ξ und η ganz willkürliche Funktionen von x und y. Jetzt sind alle Lösungen des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ unter einander gleichberechtigt und daher verlangt die Integration dieses vollständigen Systems die Operationen

2, 1.

Im vorliegenden Falle ziehen wir also gar keinen Vortheil aus der bekannten Integralinvariante.

Dies liegt aber nicht in einer Unvollkommenheit unserer Theorie, sondern es beruht auf dem Wesen der Sache. Es sind ja einerseits alle Lösungen unter einander gleichberechtigt, und es sind auch andererseits nachdem eine Lösung gefunden ist, alle übrigen Lösungen unter einander gleichberechtigt.

Fall V. [Seite 34].

Der fünfte Fall ist dadurch charakterisirt, dass

$$C = 0$$

ist und dass Uf die Form

$$Uf = a\left(x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + b\frac{\partial f}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial f}{\partial z} + \beta\mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

mit den beiden willkürlichen constanten a und b besitzt. Jetzt werden die ∞^2 charakteristischen Mannigfaltigkeiten durch eine zweigliedrige, also *integrable*[59]) Gruppe transformirt, deren Transformationen nicht vertauschbar sind. Man findet die beiden infinitesimalen Transformationen dieser letzten Gruppe durch zwei Quadraturen. Man bildet zu diesem Zwecke zunächst die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen der ersten dirivirten Gruppe. In dieser Weise findet man zunächst durch eine Quadratur die invariante infinitesimale Transformation der oben besprochenen zweigliedrigen Gruppe, sodann durch eine neue Quadratur die fehlende infinitesimale Transformation dieser Gruppe. Hinterher bestimmt man eine erste Lösung des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ durch eine dritte Quadratur und endlich die fehlende Lösung durch eine vierte Quadratur.

In diesem Falle verlangt somit die Integration unseres vollständigen Systems *vier successive* Quadraturen also die Operationen

0, 0, 0, 0.

Fall VI. [Seite 36].

Der sechste Fall ist dadurch charakterisirt dass

$$C = 0, \qquad A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B \neq 0$$

ist und dass die infinitesimalen Transformationen Uf die kanonische Form

$$Uf = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

mit den willkürlichen Constanten a, b, besitzen.

In diesem Falle wird das zweidimensionale Gebiet der ∞^2 charakteristischen Mannigfaltigkeiten durch eine *zweigliedrige* Gruppe mit *vertauschbaren* Transformationen transformirt. Es verlangt daher nach meinen allgemeinen Theorien die Bestimmung dieser zweigliedrigen Gruppe die Erledigung einer *Riccatischen* Differentialgleichung *erster* Ordnung[60]. Sodann finden wir die beiden Lösungen unseres vollständigen Systems durch zwei Quadraturen, die in dem Sinne von einander unabhängig sind, dass es gleichgültig ist in welcher Reihenfolge sie ausgeführt werden.

Die im vorliegenden Falle erforderlichen Operationen bezeichnen wir durch die Symbole

$$R, \quad 0, \quad 0.$$

Fall VII. [Seite 37].

Dieser Fall ist dadurch charakterisirt, dass

$$C = 0, \qquad A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B \neq 0$$

und dass Uf die Form

$$\frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

besitzt. Jetzt ist die Gruppe Uf intransitiv und wir finden daher eine Lösung des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ ohne Integration, ja ohne Quadratur, dass heisst durch eine Operation (0). In jedem unter den hiermit gefundenen dreidimensionalen Räumen liegen ∞^1 charakteristische Mannigfaltigkeiten, und das eindimensionale Gebiet dieser ∞^1 Mannigfaltigkeiten wird von einer einzigen infinitesimalen Transformation transformirt. Diese infinitesimale Transformation wird daher durch eine Quadratur gefunden und eine neue Quadratur giebt sodann die fehlende

Lösung unseres vollständigen Systems. Jetzt verlangt daher die Integration des vorgelegten vollständigen Systems die Operationen

$$(0), \quad 0, \quad 0.$$

Die beiden Quadraturen sind nicht von einander unabhängig.

Fall VIII. [Seite 38, N. 42].

In diesem Falle ist

$$C = 0, \qquad A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B \neq 0$$

und

$$Uf = z\alpha \frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Es werden daher die Lösungen unseres vollständigen Systems ohne Integration und Quadratur, dass heisst durch die Operation (0) gefunden. Dieser Fall tritt ein, wenn $C = 0$, $A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B \neq 0$ sind während die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varrho_x & \varrho_y \\ \sigma_x & \sigma_y \end{vmatrix}$$

der beiden Grössen

$$\varrho = A_x + B_y, \qquad \sigma = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y$$

nicht identisch verschwindet.

Fall IX. [Seite 39].

In diesem Falle ist

$$C = 0, \qquad A = 0, \qquad \mathfrak{A} = 0, \qquad B = 0, \qquad \mathfrak{B} = 0$$

und

$$D = 1.$$

Die Gruppe Uf hat die Form

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha \frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Die Lösungen unseres vollständigen Systems sind daher unter einander gleichberechtigt und es verlangt daher die Bestimmung einer ersten Lösung x eine Operation 2. Nachdem eine solche Lösung gefunden ist,

wird das eindimensionale Gebiet der ∞^1 charakteristischen Mannigfaltigkeiten, die in einem Raum $x = a$ enthalten sind, nur durch eine infinitesimale Transformation transformirt. Man findet daher wie im Falle VII die fehlende Lösung des vollständigen Systems durch zwei successive Quadraturen. Das ganze Integrationsgeschäft verlangt also die Operationen

$$2, \quad 0, \quad 0.$$

Fall X. [Seite 39].

In diesem Falle ist

$$C = 0, \qquad A = \mathfrak{A} = 0, \qquad \mathfrak{B} = kB, \qquad B_y \neq 0, \qquad k = \text{Const.}$$

Die infinitesimalen Transformationen Uf besitzen die Form

$$Uf = \xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{B_y}(B\xi_x + B_x\xi)\frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

und dabei ist $\xi(x)$ eine willkürliche Funktion von x. Die verkürzte Gruppe Uf in den Veränderlichen x und y ist ***imprimitiv***, indem die Curvenschar $x = \text{const.}$ der xy-Ebene invariant bleibt. Daher verlangt die Bestimmung der Lösung x nur die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, also eine Operation 1. Ist x bestimmt, so wird die fehlende Lösung ohne Integration oder Quadratur gefunden, indem alle Uf, die x invariant lassen, die Form

$$(\ )\frac{\partial f}{\partial z} + (\ )\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

besitzen.

Im vorliegenden Falle verlangt also das Integrationsgeschäft die Operationen

$$1, \quad (0).$$

Fall XI. [Seite 39].

In diesem Falle ist

$$C = 0, \qquad A = 0, \qquad \mathfrak{A} = 0$$

$$B = 1, \qquad \mathfrak{B} = k = \text{Const.}$$

und die infinitesimalen Transformasionen Uf besitzen die Form

$$Uf = \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \mathfrak{z}\beta \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

wobei η eine ganz beliebige Funktion von x und y darstellt. Die verkürzten Transformationen $\bar{U}f$ transformiren das eindimensionale Gebiet $x =$ Const. durch eine Gruppe mit *einem einzigen* Parameter. Daher findet man durch eine Quadratur den Multiplicator desjenigen vollständigen Systems, dessen einzige Lösung x ist und eine zweite Quadratur giebt x selbst. Um sodann die fehlende Lösung y zu finden integrirt man eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, die nicht vermieden werden kann. Die infinitesimalen Transformationen Uf, die x invariant lassen, transformieren ja y in allgemeinster Weise.

Im vorliegenden Falle verlangt also die Integration des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ die Operationen

o, o, 1.

Fall XII. [Seite 41].

In diesem Falle ist

$$C = 0, \qquad A = 0, \qquad \mathfrak{A} = 0$$

$$B = Y(y), \qquad \mathfrak{B} = y\,Y(y), \qquad D = 0$$

und die infinitesimalen Transformationen Uf besitzen die Form

$$Uf = \frac{\partial f}{\partial x} + z\alpha \frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Man findet daher die Lösung y ohne Integration bez. Quadratur durch eine Operation (o). Sodann verlangt die Bestimmung von x zwei successive Quadraturen.

In diesem Falle brauchen wir also die Operationen

(o), o, o.

Fall XIII. [Seite 41].

In diesem Falle ist

$$C = A = \mathfrak{A} = 0$$

$$B = y, \qquad \mathfrak{B} = xy, \qquad D = 0$$

und die infinitesimalen Transformationen Uf besitzen die Form

$$z\alpha\frac{\partial f}{\partial z}+\mathfrak{z}\beta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

und also werden beide Lösungen ohne Integration oder Quadratur gefunden.

Die Integration des vollständigen Systems: $X_1 f=0$, $X_2 f=0$ verlangt also in diesem Falle nur die Operation

(0).

Fall XIV. [Seite 41].

Jetzt ist

$$C=0, \qquad A=\mathfrak{A}=0$$

$$B=B(x), \qquad \mathfrak{B}=x\,B(x)$$

und

$$Uf=\eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}+(\ )\frac{\partial f}{\partial z}+(\ )\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

wobei η eine ganz willkürliche Funktion von x, y bezeichnet. Die Gruppe Uf ist somit intransitiv und dementsprechend findet man die Lösung x ohne Integration und Quadratur, also durch eine Operation (0). Sodann verlangt die Bestimmung der Lösung y eine Operation 1.

Im vorliegenden Falle brauchen wir also zur Integration des vollständigen Systems: $X_1 f=0$, $X_2 f=0$ die Operationen

(0), 1.

Fall XV. [Seite 42]

In diesem Falle ist

$$C=0, \qquad A=0, \qquad B=0, \qquad \mathfrak{A}=1, \qquad \mathfrak{B}=0, \qquad D=0$$

und

$$Uf=\xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+\text{Const.}\frac{\partial f}{\partial y}+z\alpha\frac{\partial f}{\partial z}+\mathfrak{z}\beta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

wobei $\xi(x, y)$ eine willkürliche Funktion von x und y bezeichnet. Man findet daher die Lösung x durch zwei successive Quadraturen; sodann verlangt die Bestimmung von y eine Operation 1.

Im vorliegenden Falle verlangt also die Integration des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ die Operationen

o, o, 1.

Fall XVI. [Seite 43].

Jetzt ist

$$C = 0, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad \mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = y, \quad D = 0$$

und

$$Uf = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}.$$

Die Lösungen unseres vollständigen Systems sind jetzt gleichberechtigt und es verlangt daher die Bestimmung von x eine Operation 2; sodann geben zwei successive Quadraturen die fehlende Lösung y.

In diesem Falle brauchen wir daher zur Integration des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ die Operationen

2, o, o.

Fall XVII. [Seite 46].

Jetzt ist

$$C = x, \qquad A = B = \mathfrak{A} = \mathfrak{B} = D = 0$$

und Uf besitzt die Form

$$Uf = \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} + \text{Const.}\, z\frac{\partial f}{\partial z} + \text{Const.}\, \mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

mit der willkürlichen Funktion η der beiden Argumente x und y. Wir finden daher die Lösung x ohne Integration oder Quadratur durch eine Operation (o); sodann liefert eine Operation 1 die fehlende Lösung y.

Die Integration des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ verlangt daher in diesem Falle die Operationen

(o), 1.

Fall XVIII. [Seite 48].

In diesem Falle ist

$$C = x, \qquad A = 0, \qquad \mathfrak{A} = 0, \qquad D = D(x)$$

$$B = y, \qquad \mathfrak{B} = y\,\varphi(x) + \psi(x)$$

und

$$Uf = \mu(x)\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\int \frac{\mu(x)\,C(x)\,dx}{x}\right) z\frac{\partial f}{\partial z} + \left(\int \frac{\mu(x)\,dx}{x}\right) \mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}\,.$$

Man findet daher zunächst die Lösung x durch eine Operation (o) und sodann die Lösung y durch zwei successive Quadraturen. Im vorliegende Falle verlangt daher die Integration des vollständigen Systems die Operationen

(o), o, o.

Fall XIX. [Seite 49].

Jetzt ist

$$C = x, \qquad A = 0, \qquad \mathfrak{A} = 0, \qquad D = 1$$

$$B = X(x), \qquad \mathfrak{B} = X_1(x)$$

und

$$Uf = \mu(x)\frac{\partial f}{\partial y} + \text{Const.}\, z\frac{\partial f}{\partial z} + \text{Const.}\, \mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}\,.$$

Man findet daher die Lösung x durch die Operation (o) und sodann die Lösung y durch zwei successive Quadraturen. Die Integration unseres vollständigen Systems verlangt daher auch in diesem Falle die Operationen

(o), o, o.

Anmerkungen.

1. Nur der erste Abschnitt liegt im Manuscript vor. G. S.

2. Ueber infinitesimale Transformationen Yf die mit gegebenen infinitesimalen Transformationen ***vertauschbar*** sind, sieh Sophus Lie: ***Theorie der Transformationsgruppen***, unter Mitwirkung von F. Engel, Bd. I p. 367. Die dadurch bestimmte Gruppe G sieh l. c. p. 368 fg.

   Wenn es keine solche Transformationen Yf giebt, so ist die vorgelegte Gruppe $X_1f \dots X_\nu f$ asystatisch *Th. d. Tr.* Bd. I p. 510 Sats 2, und ihre Invarianten d. h. die Lösungen des vollständigen Systems:

$$X_1f = 0, \dots X_\nu f = 0$$

   können durch ausführbare Operationen gefunden werden (*Th. d. Tr.* Bd. I p. 518 satz 7). S.

3. Zu S. 4 Zeile 17. Diese Annahme schien uns nicht unmittelbar evident, und wir haben daher mit Herrn Professor F. Engel über diesen Punkt correspondiert. In einem Brief von 14—5—02 hat Prof. Engel uns Folgendes mitgetheilt:

   «Mir ist nun keine Stelle bekannt, wo Lie bewiesen oder auch nur behauptet hat, dass man auch zu jeder intransitiven Gruppe eine kanonische Form mit bekannten endlichen Transformationen finden könnte. Doch wird er es sich vielleicht so gedacht haben. Vgl. *Th. d. Tr.* Bd. I p. 458 das klein Gedruckte: Ist die dort definirte Zahl $m = r$, so ist die kanonische Form ohne weiteres angebbar. Ist $m > r$, so kommt man zum Ziele, indem man gewisse transitive Gruppen bestimmt, die mit der gegebenen Gruppe meroëdrisch isomorph sind».

   Zu S. 4 Zeile 20. Der Begriff «reciprok» ist früher von Lie nur bei einfach transitiven Gruppen gebraucht; hier bedeutet offenbar die «reciproke» Gruppe die Gruppe G von allen Transformationen die mit den X_1f vertauschbar sind, gleichgültig ob die Gruppe X_if einfach transitif ist oder nicht. G. S.

   Zu S. 5 Zeile 6—9. Dieser Punkt schien uns unklar, da hier vorausgesetzt wird, dass G endlich ist, denn nur in diesen Falle kann Lie von einer gleichzusammengesetzten einfach transitiven Gruppe reden,

und in dem Fall, dass G endlich ist, (und sich nicht nur auf die identische Transformation reducirt, ein Fall, der ja schon erörtert ist), ist die Gruppe $X_i f$ transitiv, ein Fall, der ja hier kein Interesse hat. Professor Engel, den wir darüber gefragt haben ist mit uns darin einig, »dass diese Stelle entschieden nicht ganz in Ordnung ist«.

4. Man vergleiche hier *Mathematische Annalen* Bd. 25 p. 123, 22. G.

5 und 6. Siehe *Leipziger Berichte*, 1897 p. 402—407. G. S.

7. Nur der erste Abschnitt liegt vor.
Ueber die in der Einleitung besprochenen Theorien und Probleme siehe auch:
Encyclopædie der Mathematischen Wissenschaften Band II. A 4 b § 13—14 und § 29—32. S.

8. »*Ganz beliebige Funktionen*« müssen in der Bedeutung verstanden werden, dass sie den allgemeinen Bedingungen genügen, unter welchen das Integral eine Existenz hat. Auf solche Fragen gehen wir aber hier nicht ein.
Ueberall in dem Folgenden muss man ähnliche funktionentheoretische Voraussetzungen machen. S.

9. Im Manuscript war durch einen Schreibfehler überall X_1, X_2, X_3, X_4 statt F_1, F_2, F_3, F_4 gesetzt. Etwas später waren diese ersten Buchstaben X zu F corrigiert, und da es scheint, als ob Lie diese Correcturen nicht durchgeführt habe, haben wir es gethan.
In dem Folgenden haben wir auch $(i = 3,4)$ im Manuscript zu $(i = 1,2)$ corrigiert, da dieses offenbar das Richtige ist.
In den Entwickelungen auf S. 9 und 10 bedeutet natürlich $\frac{\partial F_i}{\partial x_1}$ die partielle Ableitung von $F_i\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ wenn x_2, x_3 und x_4 als Constanten aufgefasst werden, dagegen $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)$ die partielle Ableitung von F_i, wenn man in F_i zuerst die Ausdrücke der x_3 und x_4 als Funktionen von x_1 und x_2 substituirt und dann die partielle Ableitung nach x_1, nimmt etc. G. S.

10. Man sieht es unmittelbar ein, wenn man die Ausdrücke der totalen Differentiale:

$$dx_3' = dF_3 = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\right) dx_2$$

$$dx_i' = dF_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right) dx_2 \qquad (i = 1,2)$$

in die Gleichung

$$dx'_3 = \frac{\partial x'_3}{\partial x'_1} \cdot dx'_1 + \frac{\partial x'_3}{\partial x'_2} \cdot dx'_2$$

substituirt und beziehungsweise die Koefficienten von dx_1 und dx_2 auf beiden Seiten identificirt, u. s. w. S.

11. Hier bedeutet $\begin{vmatrix} U & V \\ x_i & x_k \end{vmatrix}$ die Funktionaldeterminante, $\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial V}{\partial x_i}$, von U und V nach x_i und x_k. S.

12. Folgende Andeutungen können vielleicht von Nutzen sein:

Wenn man x_4 als eine willkürliche Funktion f von x_1, x_2 und x_3 wählt, so ist das totale Differential:

$$dx_4 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot dx_3$$

für einen willkürlichen aber bestimmten Punkt x_1, x_2, x_3, x_4. Diese Gleichung ist lineär und homogen in dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 und stellt folglich im Raume M_8 eine Ebene dar. Wenn man die Funktion f anders wählt, erhält man im Allg. eine andere Ebene. Die drei partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

können daher als Ebenenkoordinaten aufgefasst werden.

Wenn man in analoger Weise x_3 und x_4 als willkürliche Funktionen f und φ von x_1 und x_2 auffasst, so ist

$$dx_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2$$

$$dx_4 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdot dx_2 .$$

Wenn man hier Alles im Raume M_8 auffasst, so stellt jede dieser Gleichungen eine Ebene und folglich beide zusammen eine Gerade dar. Wenn man f und φ anders wählt, bekommt man im Allg. eine andere Gerade.

Da dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 homogene Ebenenkoordinaten im M_8 sind, kann man folglich die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

als Liniencoordinaten im M_8 auffassen.

Wie man mit Plücker die fünfte Liniencoordinate

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

einführen kann, siehe z. B. Lie-Scheffers: *Geometrie der Berührungstransformationen* I. Kap. 7, § 3. S.

13. Dass jede Punkttransformation im Infinitesimalen projektiv ist, folgt daraus, dass die Differentiale linear und homogen transformirt werden. Sieh z. B. Lie-Engel *Th. der Tr.* I, Kap. 28. Aber dann werden in M_3 die absoluten Punktkoordinaten und folglich die fünf Liniencoordinaten projektiv transformirt. (Siehe z. B. Lie-Scheffers *Ge. der Berühr.tr.* I, p. 285, Satz 5). S.

14. Im Manuscript war durch einen Schreibfehler $dx\,dy$ statt $dx_1\,dx_2$ geschrieben. Wir haben dieses korrigiert. G. S.

15. Da $X_1 f$ und $X_2 f$ vertauschbare Transformationen mit verschiedenen Bahncurven sind, kann man solche neue Veränderliche z_2, $\mathfrak{z}_2$ einführen, dass $X_1 f$ und $X_2 f$ in die beiden Translationen

$$\frac{\partial f}{\partial z_2},\ \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_2}$$

übergehen (Sehe z. B. Lie-Scheffers *Diff. gl. mit bekannt. inf. Tr.* p. 416).

Wenn man dann die neuen Veränderlichen

$$z = e^{z_2}$$

$$\mathfrak{z} = e^{\mathfrak{z}_2}$$

einführt, so werden die inf. Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ auf die Formen

$$z\frac{\partial f}{\partial z},\ \mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

gebracht. G. S.

16. (Seite 14 und 16).

Wenn $X' f$ die erweiterte Transformation von

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + \tilde{\omega}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

ist, so ist die Bedingung dafür, dass das Integral

$$\int \psi\, dx\, dy$$

durch die Transformation Xf invariant bleibt, wie bekannt:

$$X'\psi + (\xi_x + \eta_y)\psi = 0.$$

(Siehe *Leipz. Berichte* 1897, p. 347—350)

Wenn folglich $Xf = z\dfrac{\partial f}{\partial z}$, so ist $\xi = \eta = 0$ und unsere Bedingungsgleichung nimmt die Form:

$$X'\psi = 0$$

an, u. s. w.

In der Gleichung (Seite 14 unten) war im Manuscript $\gamma_z \mathfrak{p} + \delta_z \mathfrak{q}$ statt $z\gamma_z \mathfrak{p} + z\delta_z \mathfrak{q}$ geschrieben. Wir haben es corrigiert. G. S.

17. Ueber vertauschbare Transformation etc. siehe Lie-Engel *Th. d. Tr.* I, p. 259. G. S.

18. Wenn die Relationen $(X_1 U) = 0$ und $(X_2 U) = 0$ identisch bestehen sollen, so erhält man durch Ausrechnung

$$\xi_z = \xi_{\mathfrak{z}} = \eta_z = \eta_{\mathfrak{z}} = \tilde{\omega}_z = \zeta_{\mathfrak{z}} = z\zeta_z - \zeta = \mathfrak{z}\tilde{\omega}_{\mathfrak{z}} - \omega = 0$$

woraus

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y)$$

$$\zeta = z.\alpha(x, y), \qquad \tilde{\omega} = \mathfrak{z}.\beta(x, y)$$

u. s. w. G. S.

19. Man sieht leicht dass die allgemeinste Transformation bei welcher $z\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial z}$ ihre Form bewahren, durch die Gleichungen (8) gegeben ist. Sind nämlich $x_1, y_1, z_1, \mathfrak{z}_1$ neue Veränderliche so geht $z\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\mathfrak{z}\frac{\partial f}{\partial z}$ über in

$$z\frac{\partial x_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1} + z\frac{\partial y_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_1} + z\frac{\partial z_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial z_1} + z\frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_1}$$

und

$$\mathfrak{z}\frac{\partial x_1}{\partial \mathfrak{z}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathfrak{z}\frac{\partial y_1}{\partial \mathfrak{z}}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_1} + \mathfrak{z}\frac{\partial z_1}{\partial \mathfrak{z}}\cdot\frac{\partial f}{\partial z_1} + \mathfrak{z}\frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial \mathfrak{z}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_1}$$

und wenn diese Transformationen die Formen $z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}$ und $\mathfrak{z}_1\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_1}$ erhalten sollen, müssen

$$\frac{\partial x_1}{\partial z} = \frac{\partial y_1}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial z} = \frac{\partial x_1}{\partial \mathfrak{z}} = \frac{\partial y_1}{\partial \mathfrak{z}} = \frac{\partial z_1}{\partial \mathfrak{z}} = 0$$

und

$$z\frac{\partial z_1}{\partial z} = z_1, \qquad \mathfrak{z}\frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial \mathfrak{z}} = \mathfrak{z}_1$$

das heist, $x_1, y_1, z_1, \mathfrak{z}_1$ sind durch Gleichungen von der Form (8) bestimmt. S.

20. Im Manuscript war das Glied

$$+\frac{\Omega_x V_y - \Omega_y V_x}{\Omega V}$$

durch einen Schreibfehler vergessen. Wir haben es ergänzt. G. S.

21. Sieh z. B. Lie-Scheffers: *Geometrie der Berührungstransformationen* I, p. 289. G. S.

22. Im Manuscript war A und B statt A_1 und B_1 geschrieben. Wir haben es corrigiert. G. S.

23. $\overline{U}f$ bedeutet hier die verkürzte inf. Tranformation $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$.
Ein *Multiplicator* M von $\overline{U}f$ ist definirt durch

$$\frac{\partial (M\xi)}{\partial x} + \frac{\partial (M\eta)}{\partial y} = 0$$

Siehe z. B. *Encyclopædie der math. Wiss.* II A 5, 12. S.

24. Im Manuscript hat Lie dieses zuerst etwas anders redigiert, aber später seine ursprüngliche Redaction durch die vorliegende ersetzt. Aber da diese ursprüngliche Redaction die Sache ausführlicher darstellt, denken wir, dass es von Nutzen sein kann, diese im Auszug zu reproducieren, um so mehr, als ähnliche Überlegungen in dem Folgenden sehr oft vorkommen.

Wenn wir die neuen Veränderlichen

$$x_1 = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad y_1 = Y(x, y), \quad z_1 = z, \quad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} \tag{a}$$

einführen, so geht $\overline{U}f$ über in

$$\overline{U}\left(\frac{M}{N}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \overline{U}(Y) \frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Aber infolge Satz 2 ist $\overline{U}\left(\frac{M}{N}\right) = 0$, und wenn wir Y durch die Gleichung

$$\xi \frac{\partial Y}{\partial x} + \eta \frac{\partial Y}{\partial y} = \mu\left(\frac{M}{N}\right) = \mu(x_1)$$

bestimmen, so wird unsere Transformation $\overline{U}f$ die Form

$$\mu(x_1) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

erhalten.

Durch die Variablenänderung (a) gehen andererseits die inf. Transformationen $z \frac{\partial f}{\partial z}$ und $\mathfrak{z} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$ in $z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}$ und $\mathfrak{z}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_1}$ über, (d. h. sie bleiben invariant) während das Integral die Form

$$\int \left(\frac{A_1 p_1 + B_1 q_1}{z_1} + \frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{q}_1}{\mathfrak{z}_1} + \frac{C(p\mathfrak{q}_1 - q\mathfrak{p}_1)}{z_1 \mathfrak{z}_1} + D_1 \right) dx_1 \, dy_1$$

erhält, und dabei sind die Coefficienten $A_1, B_1, \ldots\ldots D_1$ Funktionen von x_1 und y_1, die allerdings im Allgem. eine andere Form als die alten Coefficienten $A, B, \ldots. D$ haben.

Durch diese Betrachtungen erkennen wir, das es im vorliegenden Falle möglich ist, die kanonischen Veränderlichen $x, y, z, \mathfrak{z}$ *von vornherein* derart zu wählen, dass die Gruppe Uf die Form

$$\mu(x)\frac{\partial f}{\partial y} + z\,\alpha(x,y)\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta(x,y)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

erhält. S.

25. Es ist nicht nöthig, die Annahme $\mu = 1$ zu machen; man sieht es unmittelbar aus der letzte Gleichung (6), die in unserem Fall die Form

$$\mu(x)\,D_y = 0$$

annimmt, dass D eine Function von x allein ist. S.

26. Man sieht es leicht, wenn man bemerkt, dass

$$A = X(x), \quad B = 0, \quad \mathfrak{A} = X_1(x), \quad \mathfrak{B} = 0, \quad D = D(x)$$

und folglich

$$\omega = C.D(x), \quad \varrho = X'(x), \quad \sigma = X_1'(x),$$

was eingesetzt in die Gleichungen (10) und (6), die angegebenen Werthe von ξ, η, α und β liefert. S.

27. Wenn wir z. B. die erste Gleichung (10) betrachten, wo

$$N = \omega = CD + \mathfrak{A}B - A\mathfrak{B}$$

ist, und wenn wir neue Veränderliche

$$x_1 = X(x,y), \quad y_1 = Y(x,y), \quad z_1 = z, \quad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}$$

einführen und die Gleichung $\Delta N_1 = N$ (Seite 22) ins Auge fassen, so sehen wir, das

$$N_1 = 1$$

wird, sobald x_1 und y_1 durch die Bedingung

$$\frac{\partial x_1}{\partial x}\,\frac{\partial y_1}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x} = CD + \mathfrak{A}B - A\mathfrak{B}$$

bestimmt sind, was offenbar auf unendlich viele Weisen möglich ist. Folglich können wir von vornherein $N = 1$ annehmen. Vergleiche auch Note 24. S.

28. Vielleicht ist folgende direckte Überlegung vorzuziehen:
Unsere Bedingung, dass alle Unterdeterminanten von

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega_x & \omega_y \\ \varrho & \varrho_x & \varrho_y \\ \sigma & \sigma_x & \sigma_y \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden sollen, giebt

$$\omega\varrho_x = \varrho\omega_x, \quad \omega\varrho_y = \varrho\omega_y,$$

$$\omega\sigma_x = \sigma\omega_x, \quad \omega\sigma_y = \sigma\omega_y, \quad \text{etc.}$$

Aber da $N = \omega = 1$ ist, so wird

$$\varrho_x = \varrho_y = \sigma_x = \sigma_y = 0$$

d. h. ϱ und σ sind Constanten. S.

29. (Zu Seite 29). Wir haben einige Worte eingeschaltet um den Übergang zum Folgenden zu vermitteln.

Bei dieser Gelegenheit müssen wir auch die Bemerkung machen, dass im letzten Falle, wo

$$\omega = \varrho = \sigma = A = B = \mathfrak{A} = \mathfrak{B} = D = 0$$

ist, die Gleichungen (6) identisch befriedigt werden, und dass folglich

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + z\alpha \frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{z}\beta \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

wird, wo ξ, η, α und β willkürliche Funktionen von x und y sind. S.

30. Im Manuscript war das Theorem nicht fertig geschrieben, und Lie hat einen Zwischenraum gelassen um es später zu vervollständigen. Wir haben es gethan, und das Zugefügte durch eckige Klammern angedeutet. G. S.

31. Über Systeme partieller Differentialgleichungen, deren allgemeinste Lösungen nur von einer endlichen Anzahl willkürlicher Constanten abhängen, siehe Lie-Engel *Th. d. Tr.* I, Kap. 10.

In der letzten Gleichung war im Manuscript $\mathfrak{A}B_x - A\mathfrak{B}_x$ und $\mathfrak{A}B_y - A\mathfrak{B}_y$ statt $A\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}B_x$ und $A\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}B_y$ geschrieben. Wir haben es richtig gestellt. G. S.

32. Genau wie im vorigen Falle (Seite 23) kann man wohl nicht verfahren, weil $C = 0$ ist und man folglich nicht mit C multipliciren kann; aber wenn man die erste und letzte der 4 Gleichungen (Seite 33) addirt, erhält man unmittelbar die erste Gleichung (16) u. s. w. G. S.

33. Vergl. Note 27. Bei der entsprechenden Variablenänderung bleiben die Bedingungen $C = 0$ og $A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B \neq 0$ invariant und wir können von vornherein die Annahme $\omega = 1$, $\xi_x + \eta_y = 0$ machen. S.

34. Die beiden inf. Transformationen der Gruppe seien

$$U_1 f = P_y \frac{\partial f}{\partial x} - P_x \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{und} \quad U_2 f = V_y \frac{\partial f}{\partial x} - V_x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Nach S. Lie: *Leipz. Berichte* 1895, p. 294 u. f. ist es nun möglich, neue Veränderliche

$$x_1 = X(x, y)$$
$$y_1 = Y(x, y)$$

einzuführen, die der Bedingung

$$X_x Y_y - X_y Y_x = 1$$

genügen und die infinitesimale Transformation $U_1 f$ auf die Form einer Translation $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ bringen. S.

35. Siehe z. B. *Th. d. Tr.* III, s. 713. S.

36. Es genügt z. B., die neuen Veränderlichen

$$x_1 = x, \quad y_1 = y - \frac{X_1}{x}$$

einzuführen. S.

37. Wie oben bemerkt, können wir hier $D = 0$ annehmen. S.

38. Es genügt, die neuen Veränderlichen

$$x_1 = \frac{x}{k}, \quad y_1 = y + \frac{X_1}{k}$$

einzuführen. G. S.

39. Vergleiche Seite 22. S.

40. Es genügt, die neuen Veränderlichen $x_1 = -X'$, $y_1 = y$ einzuführen. G. S.

41. Hier ist, wie man leicht sieht, ein Fehler. Wenn man nämlich die neuen Veränderlichen

$$x_1 = \varphi(x), \quad y_1 = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot y + \psi(x)$$

einführt, so bleibt:

$$\Delta = \frac{\partial x_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y} \, \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

und (Seite 20)

$$\Delta \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \, . \, \varphi'(x)$$

d. h.

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \, \varphi(x)$$

und $\mathfrak{A}_1$ kann folglich nicht Null werden.

Man sieht aber leicht, dass die Transformation

$$x_1 = y - \int \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \, dx$$

$$y_1 = y - \int \frac{B}{A} \, dx$$

unsere Forderung erfüllt. S.

42. Am Rande seines Manuscripts hat S. Lie geschrieben:

!! (*gar keine inf. Trfn.*, $\xi = 0$, $\eta = 0$)

und wie es auch aus dem Falle VIII (Seite 55) hervorgeht, ist hier der Fall angedeutet, wo die Gruppe nur die identische Transformation enthält, dass heisst, wo

$$\xi = 0, \quad \eta = 0$$

sind. Die Gleichungen (15) geben alsdann:

$$0 = A\alpha_x + B\alpha_y + \mathfrak{A}\beta_x + \mathfrak{B}\beta_y$$

und wegen der Voraussetzung sind

$$C = 0, \quad A\mathfrak{B} - \mathfrak{A}B \neq 0.$$

G. S.

43. Es genügt, neue Veränderliche x_1 und y_1 einzuführen, wo x_1 eine Lösung der Gleichung

$$A\frac{\partial x_1}{\partial x} + B\frac{\partial x_1}{\partial y} = 0$$

ist. Die Formeln auf der Seite 22 zeigen dann, dass $A_1 = 0$ und dass folglich $\mathfrak{A}_1 B_1 = 0$ wird.

G. S.

44. Es genügt die neuen Veränderlichen x_1, y_1 als Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial x} = D$$

zu nehmen (Vergl. Seite 22).

S.

45. Wie man leicht sieht, kann die Integralinvariante in diesem Falle auf die Form

$$\int\left(\frac{Bq}{z} + \frac{kB\mathfrak{q}}{\mathfrak{z}}\right) dx\, dy$$

gebracht werden.

S.

46. Siehe die Transformationsformeln auf Seite 22.

S.

47. Im Manuscript war durch einen Schreibfehler Xf statt Uf geschrieben. Wir haben es corrigirt.

S.

48. In den expliciten Ausdrücken von ξ und η tritt die Integrationsconstante nur als Faktor auf, und es giebt folglich nur *eine* wesentliche infinitesimale Transformation $\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$.

Um die Voraussetzungen des Falles XII, Seite 57 herzuleiten, genügt es, die neuen Veränderlichen

$$x_1 = \int \frac{\partial x}{\xi}, \quad y_1 = \frac{\mathfrak{B}}{B}$$

einzuführen. Setzen wir nämlich

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} = \overline{U}f$$

so ist

$$\overline{U}(x_1) = \xi \cdot \frac{1}{\xi} + 0 = 1$$

$$\overline{U}(y_1) = -\frac{\mathfrak{B}^2}{B^2} \cdot \left(\left(\frac{B}{\mathfrak{B}}\right)_x \cdot \xi + \left(\frac{B}{\mathfrak{B}}\right)_y \cdot \eta\right) = 0$$

und $\overline{U}f$ erhält in den neuen Veränderlichen x_1, y_1 die Form $\frac{\partial f}{\partial x_1}$.

Die Transformationsformeln auf der Seite 22 geben andererseits:

$$A_1 = 0, \quad \mathfrak{A}_1 = 0, \quad B_1 = \xi B, \quad \mathfrak{B}_1 = \xi \mathfrak{B} = y_1 B_1.$$

Man sieht leicht, unter Anwendung der Formel $\xi B_x + B\xi_x + \eta B_y = 0$, dass

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} = 0$$

so dass B_1 eine Funktion von y_1 allein ist. Endlich können wir neue Veränderliche $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_1$ einführen derart, dass $D_1 = 0$ wird.

Wir können also von vornherein die Voraussetzungen machen:

$$C = 0, \quad A = 0, \quad \mathfrak{A} = 0$$

$$B = Y(y), \quad \mathfrak{B} = y \cdot Y(y), \quad D = 0$$

und Uf hat die Form

$$Uf = \frac{\partial f}{\partial x} + \mathfrak{s}\alpha \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{s}} + \mathfrak{z}\beta \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

w. z. b. w. S.

49. Um die Voraussetzungen des Falles XIII, Seite 57, herzuleiten, genügt es, die neuen Veränderlichen

$$x_1 = \varphi(x), \quad y_1 = \frac{B}{\varphi'(x)}$$

einzuführen. Man erhält dann:

$$\varDelta = B_y, \quad C_1 = 0, \quad A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{B}{\varphi'(x)} = y_1$$

$$\mathfrak{A}_1 = 0, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\varphi'(x)} = \frac{B\,\varphi(x)}{\varphi'(x)} = x_1 y_1, \text{ etc.}$$

w. z. b. w. S.

50. Um die Voraussetzungen des Falles XIV, Seite 58, herzuleiten, genügt es, die neuen Veränderlichen

$$x_1 = \varphi(x), \quad y_1 = y$$

zu setzen. Wir bekommen dann:

$$C_1 = 0, \quad A_1 = \mathfrak{A}_1 = 0, \quad B_1 = B_1(x_1), \quad \mathfrak{B}_1 = x_1 B_1 \text{ etc.}$$

51. Um die Voraussetzungen des Falles XV, Seite 58 herzustellen, genügt es die neuen Veränderlichen

$$x_1 = x, \quad y_1 = W$$

einzuführen. Man erhält alsdann:

$$C_1 = A_1 = B_1 = \mathfrak{B}_1 = 0$$

und $\mathfrak{A}_1 = 1$.

Unsere infin. Transformation erhält dabei die Form:

$$\xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \text{Const.} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots$$

Durch eine Variabelnänderung in den z und $\mathfrak{z}$ erreicht man ausserdem, dass $D = 0$ wird. S.

52. Anstatt $\mathfrak{A}_x$ und $\mathfrak{B}_y$ dürften eigentlich $(\mathfrak{A}_1)_x$ und $(\mathfrak{B}_1)_y$ geschrieben werden etc. G. S.

53. Ausser diesen drei Gleichungen muss, um die angedeutete Reduction zu erhalten noch eine vierte zugefügt werden, nämlich:

$$\mathfrak{A} \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \mathfrak{B} \frac{\partial Y_1}{\partial y} = Y_1.$$

Wenn man Y_1 durch diese Gleichung bestimmt, findet man durch die erste und letzte Gleichung im Texte, dass

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = \frac{\mathfrak{B}}{Y_1}, \quad \frac{\partial X_1}{\partial y} = -\frac{\mathfrak{A}}{Y_1}$$

und man sieht durch Anwendung der Relation $\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_y = 1$ dass dieses System vollständig integrabel ist.

Dass $\overline{U}f$ bei dieser Variabelnänderung seine Form behält, folgt aus den *Leipz. Berichte* 1895, Seite 294, 306. S.

54. Es genügt, die neuen Veränderlichen

$$x_1 = C(x, y), \quad y_1 = y, \quad z_1 = z, \quad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}$$

einzuführen. Dann wird nämlich

$$C_1 = C = x_1 \text{ etc.}$$

G. S.

55. Im Manuscripte war die Gleichung nicht vollständig geschrieben. Wir haben es korrigirt. G. S.

56. Im Manuscripte war $X(x)$ statt $\mu(x)$ geschrieben. S.

57. Siehe *Mathematische Annalen* B. XI. G.

58. Siehe *Leipz. Berichte* 1895. Seite 294. G. S.

59. Siehe Lie-Engel: *Theorie d. Trf. Gr.* III, Seite 681. G. S.

60. Siehe: *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab* Bd. VIII, S. 384—451. (Infolge einer Mitteilung von Hr. Prof. F. Engel). G. S.

Berichtigungen.

Zu Seite 16, Zeile 3 von unten: Statt $\mathfrak{q} z \alpha_x$ war im Manuscript $\mathfrak{q} \mathfrak{z} \alpha_x$ geschrieben. Wir haben es corrigirt.

Zu Seite 21, Zeile 2 von oben: Statt $B \frac{V_\mathfrak{y}}{V}$ soll $\mathfrak{B} \frac{V_\mathfrak{y}}{V}$ stehen.

Zu Seite 25, Zeile 5 von unten: Im Manuscript war statt Symbole Definitionsgl. geschrieben.

Zu Zeite 31, Zeile 4 von oben: An dieser Stelle soll die Note 29 ausgehen.

Zu Zeite 31, Zeile 11 von oben: Statt $\frac{p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q}{z\mathfrak{z}}$ soll $C.\frac{p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q}{z\mathfrak{z}}$ stehen.

Zu Seite 31, Zeile 13 von oben: Zu den zwei Klammern müssen die Factoren $\frac{1}{C}$ beziehungsweise $-\frac{1}{C}$ zugefügt werden.

Trykt den 24de oktober 1902.